

THUẬT TOÁN ĐÍCH HƯỚNG NGUỒN TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRÊN MẠNG HỖN HỢP MỞ RỘNG

Trần Ngọc Việt¹, Trần Quốc Chiến², Lê Mạnh Thành³

¹Cao đẳng CNTT Hữu nghị Việt-Hàn

²Đại học Sư phạm-Đại học Đà Nẵng

³Đại học Huế

trviet01@yahoo.com, tqchien@dce.udn.vn, lmthanh1953@yahoo.com

TÓM TẮT - Đồ thị là công cụ toán học hữu ích ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như giao thông, truyền thông, công nghệ thông tin, kinh tế,... Cho đến nay, trong đồ thị mới chỉ xét đến trọng số của các cạnh, các đỉnh một cách độc lập, trong đó độ dài đường đi là tổng trọng số các cạnh và các đỉnh trên đường đi đó. Tuy nhiên, trong thực tế, trọng số tại một đỉnh không giống nhau với mọi đường đi qua đỉnh đó, mà còn phụ thuộc vào cạnh đi đến và cạnh đi khỏi đỉnh đó. Bài viết xây dựng mô hình mạng hỗn hợp mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán hiệu quả hơn. Kết quả chính của bài báo là thuật toán đích hướng nguồn tìm luồng cực đại trên mạng hỗn hợp mở rộng, với ý tưởng chính của thuật toán là tìm đường đi tăng luồng từ đỉnh đích đến đỉnh nguồn trên mạng hỗn hợp mở rộng; bởi lẽ thông thường thuật toán Ford-Fulkerson tìm đường đi tăng luồng chỉ từ đỉnh nguồn đến đỉnh đích.

Từ khóa - đồ thị, mạng hỗn hợp mở rộng, luồng, luồng cực đại, thuật toán.

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Mạng và luồng trên mạng là công cụ toán học hữu ích ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như giao thông, truyền thông, công nghệ thông tin, kinh tế,... Cho đến nay trong mạng cô điển mới chỉ xét đến trọng số của các tuyến và các nút một cách độc lập, trong đó độ dài đường đi chỉ đơn thuần là tổng trọng số các cạnh và các nút trên đường đi đó. Tuy nhiên, trong nhiều bài toán thực tế, trọng số tại một nút không giống nhau với mọi đường đi qua nút đó, mà còn phụ thuộc vào tuyến đi đến và tuyến đi khỏi nút đó. Ví dụ thời gian đi qua ngã tư trên mạng giao thông phụ thuộc vào hướng di chuyển của phương tiện giao thông: rẽ phải, đi thẳng hay rẽ trái. Vì vậy cần xây dựng một mô hình mạng mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và hiệu quả hơn. Trên cơ sở các nghiên cứu về bài toán luồng cực đại [1, 2, 3, 4, 5, 6], đồ thị mở rộng [7, 8] và mạng hỗn hợp mở rộng [9, 10, 11], nên bài báo phát triển thuật toán đích hướng nguồn tìm luồng cực đại trên mạng hỗn hợp mở rộng khác biệt so với thuật toán Ford-Fulkerson.

II. MẠNG HỖN HỢP MỞ RỘNG

Cho mạng là đồ thị hỗn hợp $G = (V, E)$ với tập nút V và tập cạnh E . Các cạnh có thể có hướng hoặc vô hướng. Có nhiều loại phương tiện lưu hành trên mạng. Những cạnh vô hướng biểu diễn tuyến hai chiều, trong đó các phương tiện trên cùng tuyến nhưng ngược hướng lưu hành chia sẻ khả năng thông hành của tuyến. Trên mạng cho các hàm sau.

Hàm khả năng thông hành cạnh $c_E: E \rightarrow \mathbb{R}^*$, với $c_E(e)$ là khả năng thông hành cạnh $e \in E$.

Hàm khả năng thông hành nút $c_V: V \rightarrow \mathbb{R}^*$, với $c_V(u)$ là khả năng thông hành nút $u \in V$.

Bộ (V, E, c_E, c_V) gọi là mạng hỗn hợp mở rộng.

III. LUỒNG TRÊN MẠNG HỖN HỢP MỞ RỘNG

Cho mạng hỗn hợp mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V)$. Giả thiết G có đỉnh nguồn s và đỉnh đích t .

Tập các giá trị

$$\{f(x,y) \mid (x,y) \in E\}$$

gọi là luồng trên mạng G nếu thỏa mãn

(i) $0 \leq f(x,y) \leq c_E(x,y) \quad \forall (x,y) \in E$

(ii) Với mọi đỉnh z không phải nguồn hoặc đích

$$\sum_{(v,z) \in E} f(v,z) = \sum_{(z,v) \in E} f(z,v)$$

(iii) Với mọi đỉnh z không phải nguồn hoặc đích

$$\sum_{(v,z) \in E} f(v,z) \leq c_V(z)$$

Biểu thức

$$v(F) = \sum_{(s,v) \in E} f(s,v), \text{ gọi là giá trị của luồng } F.$$

• **Bài toán luồng cực đại**

Cho mạng hỗn hợp mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V)$ với đỉnh nguồn a và đỉnh đích z . Nhiệm vụ của bài toán là tìm luồng có giá trị lớn nhất.

Bài toán luồng cực đại là bài toán quy hoạch tuyến tính. Giá trị của luồng bị giới hạn bởi tổng khả năng thông hành của các cung đi ra từ đỉnh nguồn, vì vậy ta có thể khẳng định định lý sau:

• **Định lý 1.** Với mỗi mạng hỗn hợp mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V)$ với đỉnh nguồn a và đỉnh đích z , luôn luôn tồn tại luồng cực đại [1].

IV. THUẬT TOÁN ĐÍCH HƯỚNG NGUỒN

+ **Đầu vào.** Mạng hỗn hợp mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V)$ với đỉnh nguồn a và đỉnh đích z [4].

Các đỉnh trong G được sắp xếp theo thứ tự nào đó.

+ **Đầu ra.** Luồng cực đại $F = \{f(x, y) \mid (x, y) \in E\}$, là tập các luồng trên mạng G .

+ **Các bước.**

(1) **Khởi tạo**

Luồng xuất phát: $f(x, y) := 0, \forall (x, y) \in E$.

Các đỉnh xuất phát sẽ được lần lượt gán nhãn lần thứ nhất L_1 gồm 5 thành phần:

Nhãn lùì có dạng:

$L_1(v) = [\downarrow, prev_1(v), c_1(v), d_1(v), bit_1(v)]$ và có thể được gán nhãn lần hai

$L_2(v) = [\downarrow, prev_2(v), c_2(v), d_2(v), bit_2(v)]$, với $prev_1(v)$ là đỉnh liền kề sau đối với nhãn lùì;

Đặt nhãn lùì (\downarrow) cho đỉnh đích:

$$z [\downarrow, \phi, \infty, \infty, 1]$$

Tạo lập tập T gồm các đỉnh đã có nhãn lùì nhưng chưa được dùng để sinh nhãn lùì, T' là tập đỉnh được gán nhãn lùì nhờ các đỉnh của tập T

$$T := \{z\}, T' := \emptyset$$

(2) **Sinh nhãn lùì**

(2.1) Chọn đỉnh sinh nhãn lùì

- Trường hợp $T \neq \emptyset$: Chọn đỉnh $v \in T$ nhỏ nhất (theo thứ tự).

Loại v khỏi $T, T := T \setminus \{v\}$. Giả sử nhãn lùì của v là $[\downarrow, prev_i(v), c_i(v), d_i(v), bit_i(v)], i = 1$ hoặc 2 . B là tập các đỉnh chưa có nhãn lùì và kề đỉnh sinh nhãn lùì v . Sang bước 2.2.

- Trường hợp $T = \emptyset$ và $T' \neq \emptyset$: Gán $T := T', T' := \emptyset$. Quay lại bước 2.1.

- Trường hợp $T = \emptyset$ và $T' = \emptyset$: Kết thúc, luồng F là cực đại.

(2.2) Gán nhãn lùì cho đỉnh chưa có nhãn lùì và kề đỉnh sinh nhãn lùì v

- Trường hợp $B = \emptyset$: Quay lại bước 2.1.

- Trường hợp $B \neq \emptyset$: Chọn $t \in B$ nhỏ nhất (theo thứ tự). Loại t khỏi $B, B := B \setminus \{t\}$. Gán nhãn lùì cho t như sau:

Nếu $(t, v) \in E, f(t, v) < c_E(t, v), bit_i(v) = 1$ đặt nhãn lùì đỉnh t là: $prev_j(t) := v$;

$c_i(t) := \min\{c_i(v), c_E(t, v) - f(t, v)\}$, nếu $d_i(v) = 0$,

$c_i(t) := \min\{c_i(v), c_E(t, v) - f(t, v), d_i(v)\}$, nếu $d_i(v) > 0$;

$$d_j(t) := c_v(t) - \sum_{(i,t) \in E} f(i,t);$$

$$bit_j(t) := 1, \text{ nếu } d_j(t) > 0,$$

$$bit_j(t) := 0, \text{ nếu } d_j(t) = 0.$$

Nếu $(v,t) \in E$, $f(v,t) > 0$ đặt nhãn lùi đỉnh t là: $prev_j(t) := v$; $c_j(t) := \min\{c_v(t), f(v,t)\}$,

$$d_j(t) := c_v(t) - \sum_{(i,t) \in E} f(i,t); bit_j(t) := 1.$$

Nếu t không được gán nhãn lùi, thì quay lại bước 2.2.

Nếu t được gán nhãn lùi và $t=a$, thì sang bước hiệu chỉnh tăng luồng. Sang bước 3.

Nếu t được gán nhãn lùi và $t \neq a$, thì bỏ sung t vào T' , $T' := T' \cup \{t\}$ và quay lại bước 2.2.

(3) Hiệu chỉnh tăng luồng

Giả sử t có nhãn lùi $[\downarrow, prev_1(t), c_1(t), d_1(t), bit_1(t)]$. Ta hiệu chỉnh luồng F như sau:

(3.1) Hiệu chỉnh từ t đến z theo nhãn lùi

(3.1.1) Khởi tạo

$$x := s, y := prev_1(s), \delta := c_1(s).$$

(3.1.2) Hiệu chỉnh

(i) Trường hợp (x,y) là cạnh có hướng từ x đến y : đặt $f(x,y) := f(x,y) + \delta$.

(ii) Trường hợp (y,x) là cạnh có hướng từ y đến x : đặt $f(y,x) := f(y,x) - \delta$.

(iii) Trường hợp (x,y) là cạnh vô hướng:

Nếu $f(x,y) \geq 0$ và $f(y,x) = 0$, thì đặt $f(x,y) := f(x,y) + \delta$.

Nếu $f(y,x) > 0$, thì đặt $f(y,x) := f(y,x) - \delta$.

(3.1.3) Tịnh tiến

(i) Trường hợp $x = z$, thì sang bước 3.2.

(ii) Trường hợp $x \neq z$: Đặt $x := y$ và $y := k$, với k là thành phần thứ hai của nhãn lùi đỉnh x . Sau đó quay lại bước (3.1.2).

(3.2) Xóa tất cả nhãn của các đỉnh trên mạng mở rộng, trừ đỉnh đích z . Quay lại bước 2.

• **Định lý 2.** Nếu các khả năng thông qua cạnh và khả năng thông qua đỉnh là số nguyên, thì sau hữu hạn bước quá trình giải kết thúc.

Chứng minh

Theo định lý 1, qua mỗi bước hiệu chỉnh luồng, giá trị luồng tăng lên 1 lượng đơn vị (do c_E nguyên, c_V nguyên, kéo theo δ nguyên dương). Mặt khác, giá trị luồng bị chặn trên bởi tổng các khả năng thông qua của các cung đi khỏi đỉnh nguồn. Vì vậy qua một số hữu hạn bước quá trình giải phải kết thúc.

• **Định lý 3.** Cho $F = \{f(x,y) \mid (x,y) \in E\}$ là luồng trên mạng hỗn hợp mở rộng G với đỉnh nguồn s và đỉnh đích t . Khi đó

$$\sum_{(s,x) \in E} f(s,x) = \sum_{(x,t) \in E} f(x,t)$$

Chứng minh

Gọi V là tập các đỉnh. Với các đỉnh x, y không kề nhau ta gán $f(x,y) = 0$.

$$\text{Ta có } \sum_{y \in V} \sum_{x \in V} f(x,y) = \sum_{y \in V} \sum_{x \in V} f(y,x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{y \in V} \left(\sum_{x \in V} f(x, y) - \sum_{x \in V} f(y, x) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{y \in V \setminus \{s, t\}} \left(\sum_{x \in V} f(x, y) - \sum_{x \in V} f(y, x) \right) + \left(\sum_{x \in V} f(x, t) - \sum_{x \in V} f(t, x) \right) + \left(\sum_{x \in V} f(x, s) - \sum_{x \in V} f(s, x) \right) = 0$$

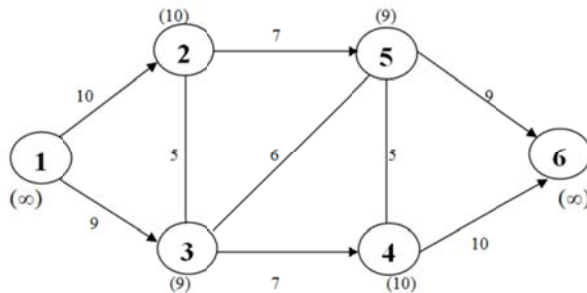
$$- \sum_{(s, x) \in E} f(s, x) + \sum_{(x, t) \in E} f(x, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \sum_{(s, x) \in E} f(s, x) = \sum_{(x, t) \in E} f(x, t)$$

• **Độ phức tạp của thuật toán.**

Giả thiết khả năng thông qua cạnh và khả năng thông qua đỉnh là số nguyên. Ở mỗi bước lặp tìm đường đi tăng luồng ta phải duyệt qua nhiều nhất là $|E|$ cung và để hiệu chỉnh luồng ta phải duyệt qua nhiều nhất là $2 \cdot |V|$ cung trên đường đi tăng luồng. Như vậy độ phức tạp mỗi lần tăng luồng là $O(|E| + 2 \cdot |V|)$. Ký hiệu v^* là trị của luồng cực đại. Số lần tăng luồng nhiều nhất là v^* . Vì vậy độ phức tạp của thuật toán là $O(v^*(|E| + 2 \cdot |V|))$.

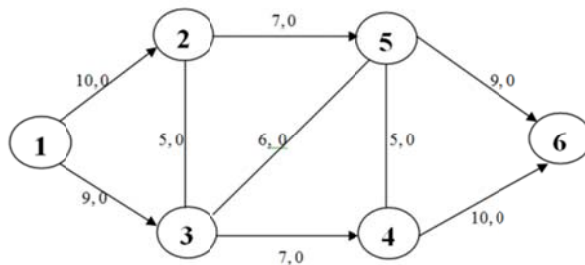
V. VÍ DỤ

Cho sơ đồ mạng hỗn hợp mở rộng ở hình 1. Mạng có 6 nút, 6 cạnh có hướng và 3 cạnh vô hướng. Khả năng thông hành cạnh c_E và khả năng thông hành nút c_V . Đỉnh nguồn là 1, đỉnh đích là 6.



Hình 1. Sơ đồ mạng hỗn hợp mở rộng

Xuất phát từ luồng 0 cho ở hình 2



Hình 2. Mạng xuất phát từ luồng 0

*) Gán nhãn lùi lần thứ 1:

Đỉnh đích 6: nhãn lùi $[\downarrow, \phi, \infty, \infty, 1]$

Đỉnh 5: nhãn lùi $[\downarrow, 6, 9, 9, 1]$

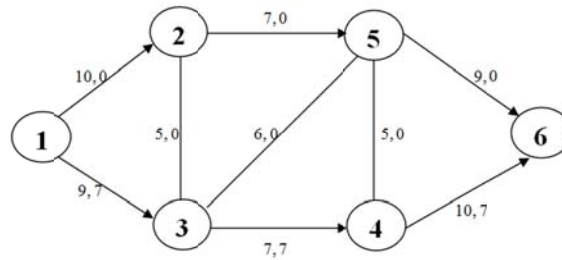
Đỉnh 4: nhãn lùi $[\downarrow, 6, 10, 10, 1]$

Đỉnh 3: nhãn lùi $[\downarrow, 4, 7, 9, 1]$

Đỉnh 2: nhãn lùi $[\downarrow, 5, 7, 10, 1]$

Đỉnh 1: nhãn lùi $[\downarrow, 3, 7, \infty, 1]$

Kết quả hiệu chỉnh tăng luồng cho ở hình 3 và giá trị luồng $v(F) = 7$.



Hình 3. Mạng có giá trị luồng $v(F)=7$

*) Gán nhãn lùi lần thứ 2:

Đỉnh đích 6: nhãn lùi $[\downarrow, \phi, \infty, \infty, 1]$

Đỉnh 5: nhãn lùi $[\downarrow, 6, 9, 9, 1]$

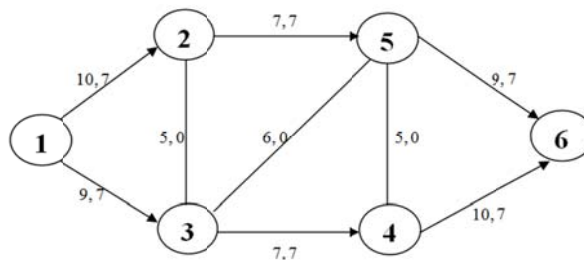
Đỉnh 4: nhãn lùi $[\downarrow, 5, 5, 3, 1]$

Đỉnh 3: nhãn lùi $[\downarrow, 5, 6, 2, 1]$

Đỉnh 2: nhãn lùi $[\downarrow, 5, 7, 10, 1]$

Đỉnh 1: nhãn lùi $[\downarrow, 2, 7, \infty, 1]$

Kết quả hiệu chỉnh tăng luồng cho ở hình 4 và giá trị luồng $v(F) = 14$.



Hình 4. Mạng có giá trị luồng $v(F)=14$

*) Gán nhãn lùi lần thứ 3:

Đỉnh đích 6: nhãn lùi $[\downarrow, \phi, \infty, \infty, 1]$

Đỉnh 5: nhãn lùi $[\downarrow, 6, 2, 2, 1]$

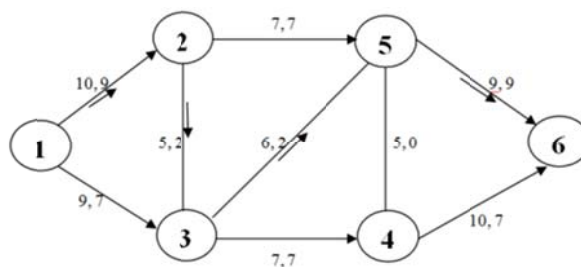
Đỉnh 4: nhãn lùi $[\downarrow, 6, 3, 3, 1]$

Đỉnh 3: nhãn lùi $[\downarrow, 5, 2, 2, 1]$

Đỉnh 2: nhãn lùi $[\downarrow, 3, 2, 3, 1]$

Đỉnh 1: nhãn lùi $[\downarrow, 2, 2, \infty, 1]$

Kết quả hiệu chỉnh tăng luồng cho ở hình 5 và giá trị luồng $v(F) = 16$.



Hình 5. Mạng có giá trị luồng $v(F)=16$

Đây là luồng cực đại, vì trong lần sinh nhãn lùi tiếp theo, đỉnh 1 không được gán nhãn lùi.

VI. KẾT LUẬN

Bài viết xây dựng mô hình mạng hỗn hợp mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và giảm khối lượng tính toán ở nhiều công đoạn này sẽ làm tăng đáng kể hiệu quả của thuật toán so với thuật toán [10] do gán nhãn đồng thời cả đỉnh nguồn và đỉnh đích. Ý tưởng của phương pháp trong báo cáo này là gán nhãn các đỉnh xuất phát từ đỉnh đích hướng đến đỉnh nguồn. Tiếp theo đó, bài báo xây dựng được thuật toán đích hướng nguồn tìm luồng cực đại trên mạng hỗn hợp mở rộng. Cuối cùng, một ví dụ cụ thể được trình bày để minh họa cho thuật toán trên.

VII. TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Trần Quốc Chiến, *Bài toán tìm luồng cực đại trên mạng*, Đề tài NCKH cấp Bộ, mã số B2005-16-34.
- [2] Trần Quốc Chiến, "Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại (1)", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 1(13)/2006, 53-58.
- [3] Trần Quốc Chiến, "Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại (2)", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 3(15)-4(16)/2006, 77-82.
- [4] Trần Quốc Chiến, "Thuật toán đích hướng nguồn tìm luồng cực đại", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 4(21)/2007, 1-6.
- [5] Trần Quốc Chiến, Hồ Xuân Bình, "Thuật toán song song tìm luồng cực đại", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 5(22)/2007, 37-42.
- [6] Trần Quốc Chiến, "Thuật toán hoán chuyển nguồn đích có trọng số tìm luồng cực đại", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 3(26)/2008, 99-105.
- [7] Trần Quốc Chiến, "Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị tổng quát", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 12(61)/2012, 16-21.
- [8] Trần Quốc Chiến, Nguyễn Mậu Tuệ, Trần Ngọc Việt, "Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị mở rộng". *Proceeding of the 6th National Conference on Fundamental and Applied Information Technology Research (FAIR), Kỷ yếu Hội nghị Khoa học Quốc gia lần thứ VI "Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng CNTT"*, Huế, 20-21/6/2013. NXB Khoa học tự nhiên và Công nghệ. Hà Nội 2013. 522-527.
- [9] Trần Ngọc Việt, Trần Quốc Chiến, Nguyễn Mậu Tuệ, "Bài toán phân luồng giao thông đa phương tiện tuyến tính tối ưu trên mạng giao thông", *Kỷ yếu Hội nghị Quốc gia lần thứ VII về Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng Công nghệ thông tin FAIR 2014*, DOI 10.15625/FAIR VII.2014-0394, 31-39.
- [10] Trần Ngọc Việt, Trần Quốc Chiến, Lê Mạnh Thanh, "Thuật toán Ford-Fulkerson cải biên tìm luồng cực đại trên mạng hỗn hợp mở rộng", *Kỷ yếu Hội nghị Quốc gia lần thứ VII về Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng Công nghệ thông tin FAIR 2014*, DOI 10.15625/FAIR VII.2014-0394, 643-649.
- [11] Trần Quốc Chiến, Trần Ngọc Việt, Nguyễn Đình Lâu, "Thuật toán tìm luồng cực đại trên mạng mở rộng", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 1(74)/2014, 1-4.
- [12] Taylor, M. A. P., editor: *Transportation and Traffic theory in the 21st Century*, Pergamon Press Amsterdam, The Netherlands, 2002.
- [13] Ellis L. Johnson, Committee Chair, George L. Nemhauser: *Shortest paths and multicommodity network flow*, 2002.

SINK TOWARD SOURCE ALGORITHM FINDING MAXIMAL FLOWS ON EXTENDED NETWORKS

Tran Ngoc Viet, Tran Quoc Chien, Le Manh Thanh

ABSTRACT - Graph is a powerful mathematical tool applied in many fields as transportation, communication, informatics, economy,... In ordinary graph the weights of edges and vertexes are considered independently where the length of a path is the sum of weights of the edges and the vertexes on this path. However, in many practical problems, weights at a vertex are not the same for all paths passing this vertex, but depend on coming and leaving edges. The paper develops a model of extended network that can be applied to modelling many practical problems more exactly and effectively. The main contribution of this paper is sink toward source algorithm finding maximal flows on extended mixed networks.

Keywords - graph, extended mixed networks, network, flow, maximal Flow, algorithm.