

# Ổn định hóa phương trình liên kết trong mô phỏng hệ nhiều vật cấu trúc mạch vòng dựa trên nguyên lý trượt

## *On stabilization of constraint equations in simulation of closed loop multibody systems based on sliding mode*

Nguyễn Quang Hoàng, Nguyễn Văn Quyên

Viện Cơ khí, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

e-Mail: [hoang.nguyenquang@hust.edu.vn](mailto:hoang.nguyenquang@hust.edu.vn), [quyen.nguyenvan@hust.edu.vn](mailto:quyen.nguyenvan@hust.edu.vn)

### Tóm tắt

Mô phỏng động lực học các cơ cấu máy hay robot song song liên quan đến việc giải hệ phương trình vi phân đại số. Đó là một hệ hỗn hợp gồm các phương trình vi phân và các phương trình đại số. Để giải hệ này, trước hết hệ hỗn hợp được đưa về hệ phương trình vi phân thường nhờ việc khử các nhân tử Lagrange và đạo hàm hai lần phương trình liên kết. Sau đó các phép tích phân số được áp dụng để giải tìm ra chuyển động của hệ. Trong quá trình tích phân các liên kết của hệ có thể bị phá vỡ. Bài báo này trình bày một phương pháp dựa trên nguyên lý điều khiển trượt để ổn định hóa các liên kết trong quá trình mô phỏng. Các mô phỏng số được thực hiện để xác minh tính hiệu quả của phương pháp tiếp cận đề xuất.

**Từ khóa:** hệ cơ học chịu liên kết, mô phỏng số, phương trình vi phân – đại số, ổn định hóa liên kết.

### Abstract:

Dynamic simulation of multibody systems such as mechanisms as well as parallel robots is associated with the solving of differential-algebraic equations (DAE). It's a mixed system of differential equations and algebraic equations. In order to solve the equations of motion for the closed loop multibody systems, normally, the constraint equations are derived twice with respect to time to transform the DAEs to ordinary differential equations. Then, the numerical integration methods are applied to find the motion of the systems. In the integrating process, the constraints in the systems may be broken due to accumulated error. This paper presents a method based on principle of sliding mode for stabilization of constrained. Some numerical simulation are carried out to verify the proposed approach.

**Keywords:** constrained mechanical system, numerical simulation, DAE, constraint stabilization.

## 1. Tổng quan

Việc mô phỏng động lực học các hệ nhiều vật có quan hệ chặt chẽ với việc thiết lập các phương trình chuyển động và phương pháp số giải các phương trình này. Đối với các cơ hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng như cơ cấu hay robot song song, các tọa độ suy rộng dư thường được sử dụng kết hợp với các nhân tử

Lagrange cho ta một hệ phương trình vi phân đại số. Việc mô phỏng số các cơ hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả [1]-[6]. Các phương pháp như tách nhân tử Lagrange, phương pháp ổn định hóa các liên kết, phương pháp tách tọa độ thường được sử dụng do tính đơn giản của nó [14]. Thông thường, các phương pháp này sử dụng ràng buộc ở mức độ gia tốc thay cho các liên kết ở mức độ vị trí. Khi tích phân theo thời gian, các liên kết có thể bị phá vỡ do sai số tích lũy. Do đó, việc ổn định hóa các liên kết trong quá trình mô phỏng trở nên rất cần thiết.

Tính ổn định của thuật toán mô phỏng cũng là một vấn đề quan trọng. Tính chất ổn định đòi hỏi các liên kết về vị trí và vận tốc không bị phá vỡ. Để giải quyết vấn đề này, phương pháp ổn định được giới thiệu bởi Baumgarte [2] là một trong những phương pháp phổ biến nhất và điều này đã được áp dụng thành công bởi một số tác giả [11,16]. Tuy nhiên, sự lựa chọn của các tham số cho phương pháp không hề đơn giản và các tham số của phương pháp thường được xác định bởi các chuyên gia [8]. Phương pháp chiếu hay phương pháp hiệu chỉnh sau khi tích phân cũng được sử dụng [3,5]. Tuy nhiên, phương pháp này làm quá trình tích phân bị ngắt quãng do cần thời gian để hiệu chỉnh.

Bài báo này giới thiệu một phương pháp ổn định hóa liên kết dựa trên nguyên lý của điều khiển trượt. Một số kết quả mô phỏng dựa trên phần mềm MATLAB được đưa ra để so sánh hai phương pháp. Trong mục 2 của bài báo này, trình bày phương trình chuyển động của hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng. Một số phương pháp giải hệ phương trình vi phân – đại số mà sử dụng các điều kiện ràng buộc ở mức gia tốc và các phương pháp ổn định hóa được trình bày trong các mục 3. Các kết quả mô phỏng số cho cơ cấu quick-return trong máy bào ngang được trình bày trong mục 4. Cuối cùng, mục 5 đưa ra các kết luận.

## 2. Phương trình chuyển động cho cơ hệ cấu trúc mạch vòng

Đối với các hệ cơ học, các phương trình vi phân mô tả động lực học của hệ và các phương trình đại số mô tả các liên kết đặt lên hệ. Khảo sát cơ hệ với  $n$  bậc tự do với các tọa độ suy rộng dư. Cần lưu ý rằng, so với việc sử dụng các tọa độ suy rộng tối thiểu các hệ sử

dùng các tọa độ suy rộng dư cho phép dễ dàng hơn trong việc thiết lập phương trình vi phân chuyển động, và cũng thuận tiện hơn để mô phỏng trên máy tính. Gọi  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ ,  $m > n$  là vectơ tọa độ suy rộng. Việc thiết lập các phương trình vi phân chuyển động cho các hệ này đã được trình bày trong rất nhiều các tài liệu tham khảo, chẳng hạn như [7],[10],[11],[12]. Với các nhân tử Lagrange phương trình vi phân chuyển động cho hệ được viết ở dạng [12]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \Phi_q^T(\mathbf{q})\lambda - \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}} \quad (1)$$

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$$

trong đó  $T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$  là động năng hệ,  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  là ma trận khối lượng có cỡ  $m' \times m$ ;  $P = P(\mathbf{q})$  là biểu thức thế năng; vectơ  $\mathbf{Q}$  là lực suy rộng của các lực điều khiển và các lực không thế; vectơ  $\lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r]^T$  với cỡ  $r' = 1, r = m - n$ , chứa các nhân tử Lagrange; vectơ  $\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ , với  $\Phi = [f_1 f_2 \dots f_r]^T$ , chứa  $m - n$  phương trình liên kết; và  $\Phi(\mathbf{q}) = \Phi(\mathbf{q})$  với cỡ  $r' \times m$  là ma trận Jacobi.

Như đã biết phương trình (1) có thể được viết lại thành

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}) + \Phi^T(\mathbf{q})\lambda = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2)$$

với

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}}$$

$\mathbf{Q} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{B}$  là ma trận điều khiển và  $\mathbf{u}$  là vectơ lực/ngẫu lực trong các khớp chủ động.

Ma trận  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  được xác định từ ma trận khối lượng  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  theo tích Kronecker [13] hoặc theo công thức Christoffel như sau

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \{c_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\} \quad (3)$$

$$c_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Đưa vào vectơ  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q})$  và chú ý đến các phương trình liên kết ta nhận được hệ phương trình vi phân đại số mô tả hệ như sau

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T(\mathbf{q})\lambda = \mathbf{p}_1(\mathbf{u}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4)$$

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (5)$$

Để giải hệ (4)-(5), các điều kiện đầu tương thích là cần thiết, nghĩa là các điều kiện đầu cần thỏa mãn các phương trình liên kết hình học và động học

$$\Phi(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

$$\Phi(\mathbf{q}_0) \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0} \quad (7)$$

Hệ phương trình vi phân đại số (4)-(5) có thể được giải bằng phương pháp số. Một số kỹ thuật hay được sử dụng như tách nhân tử Lagrange, phương pháp ổn định liên kết, và phương pháp đưa về tọa độ tối thiểu. Về cơ bản, khi áp dụng các phương pháp số cho

phương trình vi phân thường ta thường sử dụng đạo hàm bậc hai của phương trình liên kết.

### 3. Bài toán động lực học thuận - ổn định hóa các liên kết

Phần này trình bày phương pháp khử nhân tử Lagrange. Dựa trên giả thiết rằng các liên kết trong hệ là lý tưởng, do đó tổng công ảo của các lực liên kết triệt tiêu. Để khử các lực liên kết và đưa về hệ phương trình vi phân thường, ta sử dụng ma trận khử định nghĩa bởi

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\Phi_q(\mathbf{q})]^{-1} \Phi_q(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

với các ma trận Jacobi được suy ra từ phương trình liên kết thỏa mãn

$$\Phi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \Phi_q(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$$

trong đó  $\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$  tương ứng là các tọa độ suy rộng độc lập và tọa độ suy rộng phụ thuộc.

Nhân từ trái ma trận  $\mathbf{R}^T(\mathbf{q})$  với phương trình (2) và chú ý tới  $\mathbf{R}^T(\mathbf{q})\Phi^T(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$  ta nhận được

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (9)$$

Kết hợp phương trình (9) với đạo hàm hai lần phương trình liên kết theo thời gian ta nhận được hệ phương trình vi phân thường sau:

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}^T(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$$

hay

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}) \\ -\Phi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Đó là hệ phương trình vi phân thường  $n$  phương trình  $n$  ẩn. Giải hệ phương trình vi phân thường trên với điều kiện đầu tương thích (6)-(7), ta nhận được các tọa độ suy rộng  $\mathbf{q}(t)$ .

#### Ổn định hóa bằng thuật toán Baumgarte

Ý tưởng của phương pháp này là thay vì sử dụng  $\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ , ta sẽ sử dụng phương trình liên kết ở dạng sau

$$\dot{\Phi}(\mathbf{q}) + 2d\dot{\Phi}(\mathbf{q}) + w^2\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (11)$$

với  $0 < d \leq 1, 0 < w$ . Rõ ràng là nghiệm của phương trình trên có dạng

$$\Phi(t) = \Phi(t_0) \exp(-dwt) \sin(wt + a).$$

Đặc điểm quan trọng của nghiệm này là nó tiến về không khi thời gian mô phỏng tăng lên. Từ phương trình (11) ta biến đổi được

$$\Phi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\Phi}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + 2d\dot{\Phi}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + w^2\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$$

hay

$$\ddot{\Phi}(\mathbf{q})\dot{\Phi} = -\dot{\Phi}(\mathbf{q})\dot{\Phi} - 2d\dot{w}\dot{\Phi}(\mathbf{q})\dot{\Phi} - w^2\dot{\Phi}(\mathbf{q}). \quad (12)$$

Như thế, hệ phương trình (10) trở thành

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{R}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{B} \ddot{\mathbf{u}} + \\ \dot{\Phi}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{R}^T(\mathbf{q}) (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q})) \ddot{\mathbf{u}} + \\ \dot{\Phi}(\mathbf{q}) \dot{\Phi} - 2d\dot{w}\dot{\Phi}(\mathbf{q})\dot{\Phi} - w^2\dot{\Phi}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (13)$$

### Ổn định hóa theo nguyên lý điều khiển trượt

Dựa trên nguyên lý điều khiển trượt, ta xét hàm sau đây

$$\mathbf{s} = \dot{\Phi}(\mathbf{q}) + \Lambda\Phi(\mathbf{q}), \quad (14)$$

với ma trận hệ số xác định dương

$$\Lambda = \text{diag}([l_1, l_2, \dots, l_n]) > 0.$$

Xét phương trình vi phân sau

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{K}\mathbf{s} - \mathbf{k} \text{sgn}(\mathbf{s}), \quad \mathbf{K} > 0, \quad k_i > 0, \quad (15)$$

với  $\text{sgn}(\mathbf{s}) = [\text{sgn}(s_1), \dots, \text{sgn}(s_n)]^T$ .

Rõ ràng là nghiệm của (15) sẽ tiến về không và khi đó phương trình (14) sẽ đảm bảo cho các liên kết được ổn định,  $\Phi(\mathbf{q}) \rightarrow 0$ . Thật vậy, xét hàm Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s},$$

Đạo hàm theo thời gian hàm  $V$  dọc theo quỹ đạo của (15) ta nhận được

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \\ &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K}\mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{k} \text{sgn}(\mathbf{s}) < 0 \quad \forall \mathbf{s} \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Điều này đảm bảo  $\mathbf{s}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  và khi  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$  từ (14) ta suy ra

$$\Phi(t) = \Phi(t_0) e^{-\Lambda t} \rightarrow 0.$$

Như thế, thay vì sử dụng trực tiếp phương trình liên kết ta sử dụng phương trình (15). Phương trình này được viết lại thành

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \dot{\Phi}(\mathbf{q}) + \Lambda\Phi(\mathbf{q}) \quad \dot{\mathbf{s}} = \ddot{\Phi}(\mathbf{q}) + \Lambda\dot{\Phi}(\mathbf{q}), \\ \ddot{\Phi}(\mathbf{q}) + \Lambda\dot{\Phi}(\mathbf{q}) &= -\mathbf{K}\mathbf{s} - \mathbf{k} \text{sgn}(\mathbf{s}) \\ \ddot{\Phi}(\mathbf{q})\dot{\Phi} - \dot{\Phi}(\mathbf{q})\dot{\Phi} - \Lambda\dot{\Phi}(\mathbf{q}) &= -\mathbf{K}\mathbf{s} - \mathbf{k} \text{sgn}(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

Hay

$$\ddot{\Phi}(\mathbf{q})\dot{\Phi} = -[\dot{\Phi}(\mathbf{q}) + \Lambda\Phi(\mathbf{q})]\dot{\Phi} - \mathbf{K}\mathbf{s} - \mathbf{k} \text{sgn}(\mathbf{s}) \quad (16)$$

Khi đó phương trình vi phân thường mô tả động lực học hệ trở thành

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{R}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{B} \ddot{\mathbf{u}} + \\ \dot{\Phi}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{R}^T(\mathbf{q}) (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q})) \ddot{\mathbf{u}} + \\ \dot{\Phi}(\mathbf{q}) \dot{\Phi} - \mathbf{R}^T(\mathbf{q}) [\dot{\Phi}(\mathbf{q}) + \Lambda\Phi(\mathbf{q})] \dot{\Phi} - \mathbf{K}\mathbf{s} - \mathbf{k} \text{sgn}(\mathbf{s}) \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (17)$$

với

$$\mathbf{s} = \dot{\Phi}(\mathbf{q}) + \Lambda\Phi(\mathbf{q}) = \Phi(\mathbf{q})\dot{\Phi} + \Lambda\Phi(\mathbf{q}).$$

Lưu ý rằng, khi sử dụng phương trình (17) để mô phỏng hiện tượng chattering sẽ xuất hiện trong đáp ứng của hệ do hàm sgn. Để khắc phục hiện tượng này, trong mô phỏng số ta sẽ thay thế xấp xỉ sgn bởi một trong các hàm trơn xấp xỉ sau:

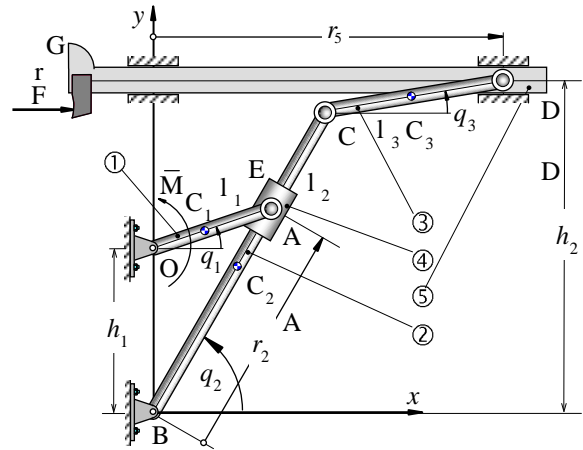
$$\text{sgn}(s) \gg \begin{cases} 1. & \text{sat}(s, e), & 0 < e = 1 \\ 2. & \tanh(cs), & c \gg 1 \end{cases}$$

hoặc

$$\text{sgn}(s) \gg \begin{cases} 3. & \frac{2}{p} \arctan(cs), & c \gg 1 \\ 4. & \frac{s}{\sqrt{s^2 + \epsilon^2}}, & 0 < \epsilon = 1 \end{cases}$$

## 4. Mô phỏng số

Ta khảo sát cơ cấu quick-return trong máy bào ngang chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng được biểu diễn như trong hình H. 1. Cơ cấu chuyển động do ngẫu lực có mômen  $M$  tác dụng lên tay quay  $OA$  và lực  $F$  tác dụng lên thanh trượt  $DG$ . Các thông số của cơ cấu được cho trong bảng 1.



H. 1 Cơ cấu quick-return

Cơ cấu là hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng với số bậc tự do bằng 1. Chọn tọa độ suy rộng dư  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$  và thiết lập 2 phương trình liên kết như sau [13]:

$$f_1(\mathbf{q}) = l_1 \sin(q_1 - q_2) + h_1 \cos q_2 = 0$$

$$f_2(\mathbf{q}) = -l_2 \sin q_2 - l_3 \sin q_3 + h_2 = 0$$

Bảng 1. Các thông số của cơ cấu [11]

Thông số \ Khâu	1	2	3	4	5
$l_i$ [m]	1.5	4.0	1.9		
$m_i$ [kg]	4000	100	30	5.0	50
$a_i$ [m]	0.00	2.0	0.95		
$J_{Ci}$ [kg.m <sup>2</sup> ]	4000	100	10	0.05	
$h_1 = 2$ [m], $h_2 = 4$ [m], $g = 9.81$ m/s <sup>2</sup>					

Sử dụng phương trình Lagrange dạng nhân tử để thiết lập phương trình chuyển động của cơ cấu. Từ biểu thức động năng của cơ hệ, ta có ma trận khối lượng suy rộng như sau:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \dot{m}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^T(\mathbf{q})$$

trong đó

$$m_{11} = I_1 + m_1 a_1^2 + m_4 l_1^2,$$

$$m_{22} = I_2 + I_4 + m_2 a_2^2 + m_3 l_2^2 + m_5 l_2^2,$$

$$m_{33} = I_3 + m_3 a_3^2 + m_5 l_3^2,$$

$$m_{23} = m_{32} = (m_3 l_2 a_3 + m_5 l_2 l_3) \cos(q_2 - q_3).$$

Vector lực quán tính ly tâm và Coriolis

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ (m_3 l_2 a_3 + m_5 l_2 l_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_2 - q_3) \\ (m_3 l_2 a_3 + m_5 l_2 l_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_2 - q_3) \end{bmatrix}$$

Vector lực gia tốc trọng trường

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 g a_1 + m_4 g l_1) \cos q_1 \\ (m_2 g a_2 + m_3 g l_2) \cos q_2 \\ m_3 g a_3 \cos q_3 \end{bmatrix}$$

Chọn  $\mathbf{u} = [M, F]^T$ , khi đó  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_2 \sin q_2 \\ -l_3 \sin q_3 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{p}_1(\mathbf{u}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{h}(\mathbf{q})$$

Từ phương trình liên kết, ma trận Jacobi và đạo hàm riêng theo tọa độ suy rộng

$$\Phi = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \cos(q_1 - q_2) & -l_1 \cos(q_1 - q_2) & 0 \\ 0 & -h_1 \sin q_2 & 0 \\ 0 & -l_2 \cos q_2 & -l_3 \cos q_3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{J}\Phi/\mathbf{J}\mathbf{q} = \{f_{q_{ij}}\}_{2 \times 9}$ , trong đó các phần tử bằng 0, ngoại trừ:

$$f_{q_{11}} = -l_1 \sin(q_1 - q_2)$$

$$f_{q_{12}} = l_1 \sin(q_1 - q_2)$$

$$f_{q_{14}} = l_1 \sin(q_1 - q_2)$$

$$f_{q_{25}} = -l_1 \sin(q_1 - q_2) - h_1 \cos q_2$$

$$f_{q_{25}} = l_2 \sin q_2, \quad f_{q_{29}} = l_3 \sin q_3$$

Đạo hàm theo thời gian của ma trận Jacobi được tính theo công thức tích Kronecker [13]

$$\dot{\Phi}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}\dot{\Phi}(\mathbf{I}_3 \ddot{\mathbf{A}} \Phi),$$

trong đó  $\mathbf{I}_3$  là ma trận đơn vị cấp 3.

Sử dụng phương pháp Newton-Raphson để xác định các điều kiện đầu cần thiết, ta nhận được

$$\mathbf{q}(0) = [3.0020 \quad 2.1628 \quad 2.7751]^T$$

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = [6.2832 \quad 2.3656 \quad -2.9769]^T$$

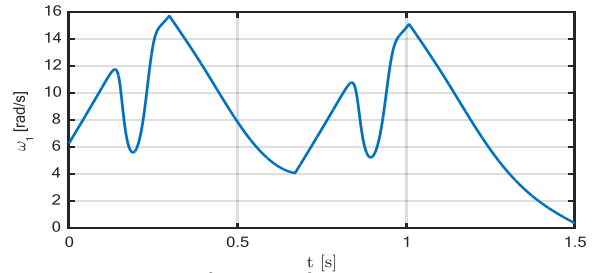
Trong mô phỏng này, mômen của ngẫu lực phát động là  $M = 165521$  Nm, và lực bảo khí gia công tác dụng lên dao gắn với DG tuân theo qui luật [11]:

- Khi  $v_D < 0$  thì

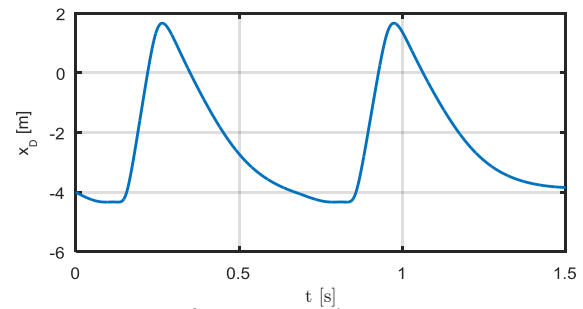
$$F = \begin{cases} 200,000 & \text{khi } -4 \leq r_5 \leq 1.2 \\ 0 & \text{khi } r_5 < 4 \text{ hoặc } r_5 > 1.2 \end{cases}$$

- Khi  $v_D \geq 0$  thì  $F = 0$

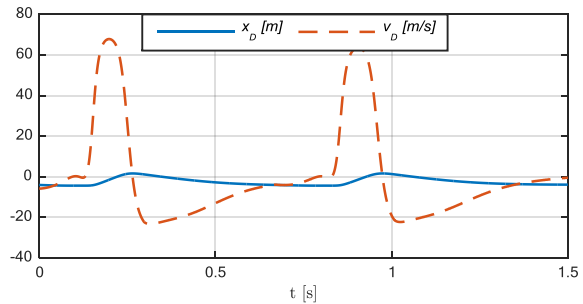
Sử dụng sơ đồ tích phân số, ta nhận được qui luật chuyển động của cơ cấu như trên các hình H.2-H.6. Cấu hình của cơ cấu được biểu diễn như trên hình H.7.



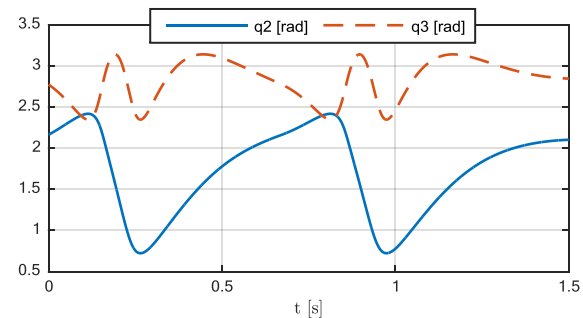
H.2 Đồ thị vận tốc góc của tay quay



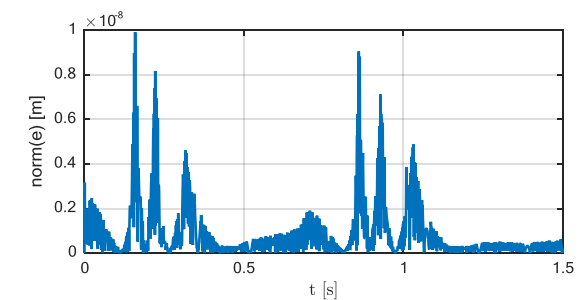
H.3 Đồ thị dịch chuyển của thanh trượt



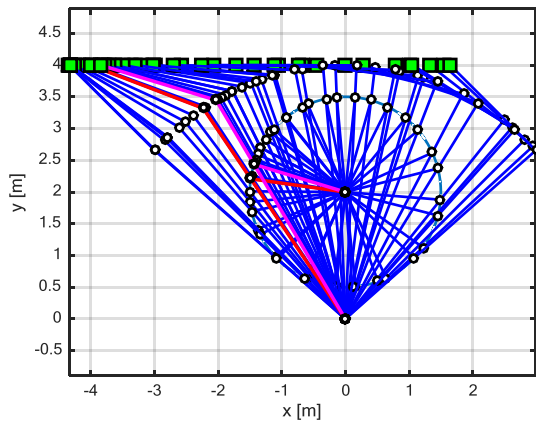
H.4 Đồ thị vị trí và vận tốc của thanh trượt



H.5 Đồ thị các góc quay của cần lắc và thanh truyền

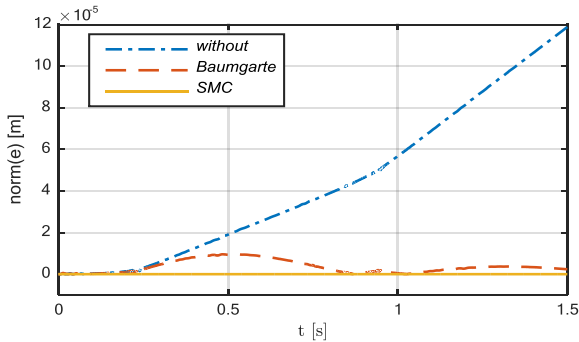


H.6 Sai số của phương trình liên kết

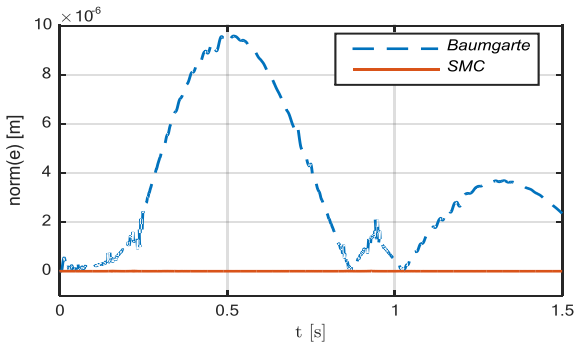


H. 7 Cấu hình của cơ cấu

Các kết quả từ H.2-H.6 phù hợp với [11]. Như trong H.6, sai số của phương trình liên kết cỡ  $10^{-8}$ , kết quả này đảm bảo cho liên kết không bị phá vỡ. Các sai số của phương trình liên kết khi không sử dụng phương pháp ổn định hóa và sử dụng phương pháp ổn định hóa được biểu diễn như trong H.8 và H.9.



H. 8 Sai số trong các phương pháp



H. 9 So sánh 2 phương pháp ổn định hóa

Các kết quả trong H.8 và H.9 thấy rằng, nếu không sử dụng phương pháp ổn định hóa thì sai số trong phương trình liên kết tăng dần nếu mô phỏng trong thời gian dài, lúc đó liên kết sẽ bị phá vỡ. Sai số của phương pháp ổn định hóa Baumgarte lớn hơn so với phương pháp được đề xuất, cỡ  $10^{-6}$ .

## 5. Kết luận

Bài báo đề xuất và triển khai thành công phương pháp ổn định hóa các liên kết khi mô phỏng số hệ động lực chịu liên kết dựa trên nguyên lý của điều khiển trượt.

Các phương trình ràng buộc ở cấp độ vị trí được thay thế bằng các ràng buộc ở cấp độ gia tốc, trong đó nguyên lý trượt được khai thác để đảm bảo cho các liên kết không bị phá vỡ trong quá trình tích phân số. Các mô phỏng số được thực hiện cho các trường hợp không sử dụng ổn định hóa, ổn định hóa theo Baumgarte, và ổn định theo nguyên lý trượt. Các kết quả mô phỏng số nhận được đã chỉ rõ hiệu quả của phương pháp tiếp cận đề xuất.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Amirouche F. M. L., C.-W. Tung, *Regularization and stability of the constraints in the dynamics of multibody systems*, Nonlinear Dynamics, 1 (6), 1990, 459-475.
- [2] Baumgarte J., *Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1, 1972, 1-16.
- [3] Bayo E., Ledesma R., *Augmented Lagrangian and Mass-Orthogonal Projection Methods for Constrained Multibody Dynamics*. Nonlinear Dynamics 9, 1996, 113-130.
- [4] Bayo E., Jalon J.G., Serna M. A., *A modified Lagrangian formulation for the dynamic analysis of constrained mechanical systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 71, 1988, 183-195.
- [5] Blajer W., Schiehlen W., Schirm W., *A projective criterion to the coordinate partitioning method for multibody dynamics*, Archive of Applied Mechanics 64, 1994, 215-222.
- [6] Braun D.J., Goldfarb M., *Eliminating constraint drift in the numerical simulation of constrained dynamical systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198, Iss. 37-40, 2009, 3151-3160.
- [7] Dinh Van Phong, *An algorithm for deriving equations of motion of constrained mechanical system*. Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam, 21(1), 1999, 36-44.
- [8] Flores P., M. Machado, E. Seabra, M. T. da Silva, *A Parametric Study on the Baumgarte Stabilization Method for Forward Dynamics of Constrained Multibody Systems*, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics 6, 2011, 011019-1 – 011019-9.
- [9] Ider S. K., Amirouche F.M.L., *Coordinate reduction in constrained spatial dynamic systems - A new approach*, Journal of Applied Mechanics 55, 1988, 899-905.
- [10] Jalon J.G., Bayo E.: *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems – The Real-Time challenge*, Springer-Verlag New York Inc, 1994.
- [11] Haug E. J.: *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Vol.1: Basic Methods*. Allyn and Bacon, Boston, 1989.



- [12] Nguyen Van Khang: *Dynamics of multibody systems*, Scientific & Technical Publishing House, Vietnam, 2007.
- [13] Nguyen Van Khang, *Kronecker product and a new matrix form of Lagrangian equations with multipliers for constrained multibody systems*. Mechanics Research Communications. 38, Issue 4, 2011, 294-299.
- [14] NIKRAVESH P.E., *Some methods for dynamic analysis of constrained mechanical systems: A survey*, Computer-Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics, ed. by E. J. Haug, Springer-Verlag, 1984, 351-368.
- [15] Tseng F.C., Ma Z.D., Hulbert G.M., *Efficient numerical solution of constrained multibody dynamics systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, 2003, 439–472
- [16] Wehage R.A., Haug E.J., *Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of constrained dynamic systems*, Journal of Mechanical Design 104, 1982, 247-255.



**Nguyễn Quang Hoàng** nhận bằng Kỹ sư ngành Cơ tin kỹ thuật, bằng Thạc sĩ ngành Cơ học kỹ thuật tại Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, (HUST); và bằng tiến sĩ Cơ học kỹ thuật (động lực học và điều khiển) tại Trường Đại học kỹ thuật Hamburg–Harburg (TUHH, CHLB Đức) vào các năm 1997, 1999 và 2006. Từ 9/2012 đến 9/2013, anh làm nghiên cứu viên tại Khoa Cơ khí của Đại học Kyung Hee, Yongin, Hàn Quốc. Hiện anh là giảng viên tại Bộ môn Cơ học ứng dụng – Viện Cơ khí, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội. Hướng nghiên cứu chính là mô hình hóa, mô phỏng số và điều khiển các hệ động lực; động lực học hệ nhiều vật dư dẫn động, đu dẫn động và hực dẫn động.



**Nguyễn Văn Quyền** nhận bằng Kỹ sư ngành Cơ điện tử, bằng Thạc sĩ khoa học ngành Cơ học kỹ thuật tại Trường Đại học Bách khoa Hà Nội (HUST) vào các năm 2009 và 2011. Hiện nay, anh là giảng viên tại Bộ môn Cơ học ứng dụng – Viện Cơ khí, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội. Hướng nghiên cứu chính là động lực học máy và cơ cấu; mô hình hóa, mô phỏng số và tối ưu hóa các hệ kỹ thuật.