Kỷ yếu Hội nghị Khoa học Quốc gia lần thứ IX "Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng Công nghệ thông tin (FAIR'9)"; Cần Thơ, ngày 4-5/8/2016
DOI: 10.15625/vap.2016.00034

LƯỢC ĐỒ SAI PHÂN KHÁC THƯỜNG MÔ PHỎNG SỐ MÔ HÌNH SIÊU QUẦN THỂ: SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ ỔN ĐỊNH LYAPUNOV

Đặng Quang Á[1], Hoàng Mạnh Tuấn[2]

[1]Trung tâm Tin học và Tính toán, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam
[2]Viện Công nghệ Thông tin, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

dangquanga@cic.vast.vn, hmtuan01121990gmail.com

TÓM TẮT— *Trong bài báo này lược đồ sai phân khác thường cho mô hình siêu quần thể được xây dựng. Tính chất ổn định của mô hình rời rạc được nghiên cứu dựa trên một mở rộng của Định lý ổn định Lyapunov. Dựa trên kết quả này chúng tôi chứng minh được rằng lược đồ sai phân khác thường bảo toàn tất cả các tính chất của mô hình siêu quần thể. Các thử nghiệm số chỉ ra rằng các kết quả lý thuyết là hoàn toàn đúng đắn. So với phương pháp chúng tôi đã sử dụng trước đó [1], phương pháp hàm Lyapunov đơn giản hơn rất nhiều vì không cần thực hiện các tính toán phức tạp và các kỹ thuật khó để chứng minh tính chất ổn định của mô hình rời rạc.*

Từ khóa— *Lược đồ sai phân khác thường, mô hình siêu quần thể, định lý ổn định Lyapunov, mô phỏng số.*

I. GIỚI THIỆU

Các nghiên cứu về các hệ thống sinh học, hóa học, vật lý, cơ học,… đã được phát triển trong nhiều năm qua [2, 4]. Các hệ thống này thường được mô tả bởi các phương trình vi phân đạo hàm riêng cũng như các phương trình vi phân thường. Nghiệm của các phương trình này có các tính chất đặc biệt như tính chất dương (chẳng hạn, số lượng quần thể trong các mô hình sinh học, nồng độ các chất trong phản ứng sinh hóa, kích thước, năng lượng,…), tính chất đơn điệu, tính chất tuần hoàn, tính chất ổn định và một số tính chất bất biến khác… Bên cạnh đó các phương trình mô tả các hệ thống này thường rất phức tạp, không có hi vọng giải đúng. Chính vì vậy việc nghiên cứu các phương pháp giải gần đúng và mô phỏng số phương trình vi phân là một trong những vấn đề quan trọng của toán học nói chung và toán học tính toán nói riêng. Do nhu cầu của thực tiễn và sự phát triển của lý thuyết toán học các nhà toán học đã tìm ra rất nhiều phương pháp giải gần đúng phương trình vi phân.

Để giải gần đúng phương trình vi phân mô tả các quá trình vật lý, sinh học, hóa học, cơ học,… nhiều phương pháp giải gần đúng được sử dụng, trong đó là phương pháp sai phân là phương pháp phổ biến nhất. Lý thuyết chung về các lược đồ sai phân giải phương trình vi phân đã được xây dựng và phát triển trong nhiều cuốn sách mà ngày nay đã trở thành kinh điển (xem, chẳng hạn, [17]). Ta sẽ gọi các lược đồ loại này là "lược đồ sai phân bình thường" (standard finite difference schemes). Trong nhiều bài toán phi tuyến các lược đồ sai phân bình thường có nhược điểm là gây ra hiện tượng không ổn định số (numerical instabilities) [12-14]. Một mô hình rời rạc được gọi là có hiện tượng không ổn định số nếu tồn tại nghiệm của phương trình sai phân (hay lược đồ sai phân) không bảo toàn các tính chất nghiệm của phương trình vi phân tương ứng. Trong [12-14] Mickens đưa ra rất nhiều các ví dụ chi tiết và phân tích sâu sắc hiện tượng không ổn định số xảy ra khi sử dụng các lược đồ sai phân bình thường. Nói chung lược đồ sai phân bình thường chỉ có thể bảo toàn được các tính chất của bài toán khi bước lưới h được chọn để rời rạc trục thời gian đủ nhỏ, tức là $h < h^*$ nào đó với h^* rất nhỏ. Chính vì thế khi nghiên cứu mô hình trong khoảng thời gian rất lớn ($t \to \infty$) thì việc chọn bưới lưới quá nhỏ dẫn đến chi phí tính toán rất lớn.

Để khắc phục hiện tượng không ổn định số, vào những năm 80 của thế kỷ trước Mickens đã đề xuất một khái niệm mới, được gọi là lược đồ sai phân khác thường (nonstandard finite difference schemes) để phân biệt với các lược đồ sai phân bình thường [12-14]. Theo đó, lược đồ sai phân khác thường là lược đồ được xây dựng dựa trên một bộ quy tắc xác định. Các quy tắc này được đề xuất bởi Mickens dựa trên các phân tích hiện tượng không ổn định số khi sử dụng các lược đồ sai phân bình thường. Đây là lớp phương pháp số bảo toàn các tính chất của phương trình vi phân tương ứng. Đó là các tính chất của nghiệm của phương trình vi phân như: tính chất nghiệm dương, tính chất nghiệm đơn điệu, tính chất nghiệm bị chặn, tính chất nghiệm tuần hoàn, các tính chất ổn định của nghiệm và một số tính chất bất biến khác như bảo toàn năng lượng, bảo toàn hình dạng hình học… Ưu thế của các lược đồ sai phân khác thường là có thể bảo toàn các tính chất nghiệm của phương trình vi phân tương ứng với mọi bước lưới $h > 0$. Các lược đồ thỏa mãn tính chất này còn được gọi là các lược đồ sai phân tương thích động lực (dynamically consistent).

Một tính chất đặc biệt quan trọng của phương trình vi phân là tính chất ổn định của tập hợp điểm cân bằng. Cần nhấn mạnh rằng việc phân tích tính chất ổn định của tập hợp điểm cân bằng có vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình vi phân. Vì thế việc xây dựng các lược đồ sai phân bảo toàn tính chất ổn định cho tập hợp điểm cân bằng là thực sự quan trọng trong việc mô phỏng số và giải số phương trình vi phân. Các lược đồ sai phân bảo toàn tính chất này còn được gọi là lược đồ ổn định cơ bản (elementary stable). Có rất nhiều kết quả khác nhau về các lược đồ ổn định cơ bản, mà tiêu biểu là kết quả cho hệ động lực tổng quát [5, 6, 10] và một số kết quả khác cho các hệ phương trình cụ thể [7, 15, 16, 18]. Cách tiếp cận chung, phổ biến là xem xét ma trận Jacobian của lược đồ rời rạc tại các điểm cân bằng. Sau đó xác định các điều kiện để tất cả các giá trị riêng λ của ma trận Jacobian đều nằm trong hình cầu đơn vị. Đây chính là điều kiện cần và đủ để điểm cân bằng hyperbolic là ổn định địa phương [2, 8]. Nhược điểm chính và hạn chế chung của cách tiếp cận này là:

1. Cách tiếp cận này chỉ áp dụng được khi tất cả các điểm cân bằng đều là các điểm cân bằng hyperbolic. Nếu tồn tại một điểm cân bằng non-hyperbolic thì không thể sử dụng cách tiếp cận này. Nói chung chưa có các kết quả về lược đồ sai phân khác thường bảo toàn tính chất ổn định cho tập hợp điểm cân bằng non-hyperbolic.

2. Ngay cả khi tất cả các điểm cân bằng đều là các điểm cân bằng hyperbolic thì việc xác định điều kiện để tất cả các giá trị riêng λ của ma trận Jacobian nằm trong hình cầu đơn vị là cực kỳ khó khăn và phức tạp. Về mặt lý thuyết có thể áp dụng điều kiện Jury [2, 7, 18] để xác định các điều kiện này. Tuy nhiên trên thực tế, trong một số trường hợp việc áp dụng điều kiện này là cực kỳ phức tạp vì có thể không xác định được biểu thức của các điểm cân bằng hoặc biểu thức của các điểm cân bằng là quá phức tạp, thí dụ khi phương trình vi phân có số chiều lớn và chứa nhiều tham số trong phương trình [3]. Song song với đó khi sử dụng lược đồ sai phân có số chiều lớn (bằng số chiều của phương trình vi phân) và chứa nhiều tham số lặp (nhằm đảm bảo việc bảo toàn các tính chất của phương trình) thì việc phân tích ma trận Jacobian của lược đồ sai phân nhờ điều kiện Jury là không thực hiện được.

3. Việc xem xét ma trận Jacobian như trên chỉ đảm bảo tính chất ổn định địa phương trong khi nhiều mô hình lại có tính chất ổn định toàn cục [2, 4].

Để khắc phục hạn chế này có thể sử dụng lý thuyết ổn định Lyapunov để chỉ ra tính chất ổn định của tập hợp điểm cân bằng, kể cả điểm cân bằng nonhyperbolic [8, 9]. Tất nhiên, nhược điểm của Định lý ổn định Lyapunov là không phải lúc nào cũng xác định được hàm Lyapunov phù hợp. Mặc dù vậy, trong nhiều bài toán có tính chất đặc biệt việc xây dựng hàm Lyapunov (liên kết chặt với tính chất của bài toán) lại là công việc đơn giản hơn rất nhiều. Khi đó tính chất ổn định của các điểm cân bằng được chỉ ra mà không cần thực hiện các phân tích ma trận Jacobian của phương trình rời rạc. Đây là hướng tiếp cận có thể áp dụng cho nhiều lớp bài toán khác nhau, khắc phục được hạn chế của cách tiếp cận dựa trên việc phân tích ma trận Jacobian trước đó.

Với mục tiêu minh họa cho hướng tiếp cận này, trong bài báo này, chúng tôi xét mô hình siêu quần thể (dạng thu gọn) được đề xuất bởi Keymer năm 2000 [11]

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(1-x-y) - \beta xy + \delta y - ex, \qquad \frac{dy}{dt} = y(\beta x - \delta - e), \tag{1}$$

trong đó $\lambda, \beta, \delta, e$ là các tham số dương đặc trưng cho mô hình. Do ý nghĩa sinh học nên ta chỉ xét các giá trị ban đầu trong tập $D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 |\, x, y \geq 0; x + y \leq 1\}$, tức là các giá trị ban đầu thỏa mãn

$$x(0), y(0) \geq 0;\ x(0) + y(0) \leq 1. \tag{2}$$

Các phân tích toán học [2, Chapter 6] chỉ ra mô hình (1) có các tính chất sau đây:

(P_1). Tính chất hội tụ đơn điệu của tổng $s(t) = x(t) + y(t)$:

Với mọi giá trị ban đầu thỏa mãn $x(0) + y(0) = \lambda/(\lambda + e) := s^*$ thì mọi nghiệm $x(t), y(t)$ đều thỏa mãn $x(t) + y(t) = s^*$. Với mọi giá trị ban đầu thỏa mãn $x(0) + y(0) > s^*$ thì mọi nghiệm $x(t), y(t)$ đều thỏa mãn $x(t) + y(t)$ hội tụ đơn điệu giảm đến s^*, ngược lại, với mọi giá trị ban đầu thỏa mãn $x(0) + y(0) < s^*$ thì mọi nghiệm $x(t), y(t)$ đều thỏa mãn $x(t) + y(t)$ hội tụ đơn điệu tăng đến s^*.

(P_2). Tính chất bị chặn:

Tất cả các nghiệm của mô hình (1) với các giá trị ban đầu thỏa mãn (2) cũng thỏa mãn (2). Nói các khác thì tập D là bất biến dương.

(P_3). Tính chất ổn định tiệm cận địa phương:

Mô hình (1) có hai điểm cân bằng là $E_1 = (\frac{\lambda}{\lambda+e}, 0)$ và $E_2 = (\frac{\delta+e}{\beta}, \frac{\lambda}{\lambda+e} - \frac{\delta+e}{\beta})$. Đặt $R_0 = \frac{\beta\lambda}{(\lambda+e)(\delta+e)}$.

Theo [2, Chapter 6] thì E_1 là ổn định tiệm cận địa phương nếu $R_0 < 1$ và E_2 là ổn định tiệm cận địa phương nếu $R_0 > 1$.

(P_4). Tính chất ổn định tiệm cận toàn cục:

Định lý Poincare-Bendixon [2] chỉ ra rằng E_1 là ổn định tiệm cận toàn cục trên D nếu $R_0 < 1$ và E_2 là ổn định tiệm cận toàn cục trên $D^* = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 |\, x \geq 0; y > 0;\ x + y \leq 1\}$ nếu $R_0 > 1$.

(P_5). Tính chất không tuần hoàn của nghiệm

Tiêu chuẩn Dulax [2] chỉ ra rằng mô hình (1) không có nghiệm tuần hoàn trên D.

Đây là mô hình có tính chất rất phức tạp. Mới đây bằng cách sử dụng lược đồ sai phân khác thường chúng tôi đã xây dựng thành công mô hình siêu quần thể rời rạc tương thích động lực [1], tức là mô hình rời rạc bảo toàn các tính chất $(P_1) - (P_5)$ của mô hình (1). Việc xây lược đồ sai phân khác thường cho mô hình (1) là rất phức tạp. Khó khăn chính là ở bảo toàn tính chất ổn định toàn cục (P_4). Để xây dựng lược đồ sai phân khác thường bảo toàn tính chất này cần sử dụng các kỹ thuật tinh vi và các tính toán rất phức tạp.

Trong bài báo này nhờ Định lý ổn định Lyapunov chúng tôi xây dựng lược đồ sai phân khác thường bảo toàn tính chất ổn định toàn cục của mô hình (1), nhờ đó nhận được lược đồ sai phân bảo toàn tất cả các tính chất của mô hình (1). So với cách chứng minh của chúng tôi trước đây, cách chứng minh sử dụng sử dụng định lý ổn định Lyapunov ngắn gọn và đơn giản hơn rất nhiều. Ở đây, không cần thực hiện các tính toán phức tạp và các kỹ thuật tinh vi. Cách tiếp cận này có thể được áp dụng cho các lớp bài toán tương tự.

Trong phần II lược đồ sai phân khác thường bảo toàn các tính chất của mô hình (1) được xây dựng. Phần III trình bày các thử nghiệm số nhằm chỉ ra các kết quả lý thuyết là hoàn toàn đúng đắn. Phần kết luận và hướng nghiên cứu tiếp theo được trình bày trong phần IV.

II. XÂY DỰNG LƯỢC ĐỒ SAI PHÂN KHÁC THƯỜNG

Chúng tôi đề xuất lược đồ sai phân khác thường cho mô hình (1) ở dạng

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{\varphi} = \lambda - (\lambda+e)x_{k+1} - \lambda y_{k+1} + \delta y_k - \beta x_k y_k, \tag{3}$$

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{\varphi} = \beta x_k y_k - \delta y_k - e y_{k+1}, \quad 0 < \varphi(h) = h + O(h^2) \text{ khi } h \to 0.$$

So với lược đồ chúng tôi đã xây dựng trước đây [1] lược đồ (3) đơn giản hơn, chỉ chứa một tham số φ . Mục tiêu của chúng ta là xác định điều kiện đặt lên hàm mẫu số φ để lược đồ (3) bảo toàn các tính chất $(P_1) - (P_5)$ của mô hình (1).

A. Tính chất hội tụ đơn điệu của tổng $s(t) = x(t) + y(t)$

Định lý 1. *Lược đồ sai phân (3) bảo toàn tính chất (P_1) của mô hình (1) với mọi hàm $\varphi(h)$ thỏa mãn.*

$$\varphi(h) > 0, \ \forall h > 0, \ \varphi(h) = h + O(h^2) \text{ khi } h \to 0. \tag{4}$$

Chứng minh. Đặt $s_k = x_k + y_k$. Cộng vế với vế hai phương trình của (3) ta thu được phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng số đối với s_k

$$s_{k+1} = \frac{s_k}{1+\varphi(\lambda+e)} + \frac{\lambda\varphi}{1+\varphi(\lambda+e)}. \tag{5}$$

Dễ dàng tìm được biểu thức nghiệm tường minh của (5)

$$s_k = \left(s_0 - \frac{\lambda}{\lambda+e}\right)\left(\frac{1}{1+\varphi(\lambda+e)}\right)^k + \frac{\lambda}{\lambda+e}. \tag{6}$$

Chú ý rằng nếu φ là hàm dương thì $\frac{1}{1+\varphi(\lambda+e)} \in (0, 1)$. Vì thế điểm cân bằng $s^* = \frac{\lambda}{\lambda+e}$ là điểm cân bằng ổn định tiệm cận địa phương của phương trình sai phân tuyến tính (5). Do đó nó cũng chính là điểm cân bằng ổn định tiệm cận toàn cục. Kết hợp với (6) Định lý được chứng minh.

B. Tính chất bị chặn

Định lý 2. Lược đồ sai phân (3) bảo toàn tính chất (P_2) của mô hình (1) nếu hàm $\varphi(h)$ thỏa mãn điều kiện

$$\varphi(h) < \min\left\{\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\beta\lambda + \beta + \beta e}, 1\right\}, \qquad \forall h > 0. \tag{7}$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp toán học**.** Đầu tiên theo Định lý 1 thì lược đồ (3) bảo toàn tính chất (P_1) của mô hình (1). Do đó, với mọi giá trị ban đầu thỏa mãn (2) thì nghiệm của (1) đều thỏa mãn

$$0 \le x_{k+1} + y_{k+1} \le 1, \forall k > 0.$$

Do đó để chỉ ra lược đồ (3) bảo toàn tính chất (P_2) của mô hình (1) ta chỉ cần chứng minh với mọi giá trị ban đầu thỏa mãn (2) thì nghiệm của (3) đều không âm. Thật vậy, dễ dàng đưa lược đồ (3) về dạng lược đồ hiển dạng

$$y_{k+1} = \frac{(1-\varphi\delta)y_k + \varphi\beta x_k y_k}{1+\varphi e}, \tag{8}$$

$$x_{k+1} = \frac{x_k - \varphi\lambda y_{k+1} + \varphi\delta y_k - \varphi\beta x_k y_k + \varphi\lambda}{1 + \varphi(\lambda + e)}. \tag{9}$$

Do hàm φ thỏa mãn (7) nên từ (8) ta thu được $y_{k+1} \geq 0$ với mọi $y_k \geq 0$. Ta cần chỉ ra $x_{k+1} \geq 0$ với mọi x_k và y_k thỏa mãn (2). Thế y_{k+1} vào biểu thức của x_{k+1} ta nhận được

$$x_{k+1} = \frac{x_k - \frac{\varphi\lambda(1-\varphi\delta)y_k + \varphi^2\beta\lambda x_k y_k}{1+\varphi e} + \varphi\delta y_k - \varphi\beta x_k y_k + \varphi\lambda}{1 + \varphi(\lambda + e)}.$$

Mẫu số của biểu thức x_{k+1} là $1 + \varphi(\lambda + e) > 0$ nên ta chỉ cần chỉ ra tử số là không âm. Đặt

$$A = 1 - \frac{\varphi^2\beta\lambda y_k}{1+\varphi e} - \varphi\beta y_k, \quad B = -\frac{\varphi\lambda(1-\varphi\delta)y_k}{1+\varphi e} + \varphi\lambda,$$

thì

$$x_{k+1} = \frac{Ax_k + \varphi\delta y_k + B}{1 + \varphi(\lambda + e)}. \tag{10}$$

Do $0 \leq y_k \leq 1$ nên $B \geq \varphi\lambda - \frac{\varphi\lambda(1-\varphi\delta)}{1+\varphi e} \geq \varphi\lambda - \frac{\varphi\lambda}{1+\varphi e} \geq 0$. Mặt khác, do $\varphi < 1$ nên ta có $\varphi^2 \leq \varphi$. Do đó

$$A \geq 1 - \frac{\varphi^2\beta\lambda}{1+\varphi e} - \varphi\beta = \frac{1+\varphi e - \varphi^2\beta\lambda - \varphi\beta - \varphi^2\beta e}{1+\varphi e} \geq \frac{1 - \varphi(\beta\lambda + \beta + \beta e)}{1+\varphi e} \geq 0.$$

Vì thế từ (10) ta thu được $x_{k+1} \geq 0$ với mọi x_k và y_k thỏa mãn (2). Từ đó Định lý được chứng minh.

C. Tính chất ổn định toàn cục của tập hợp điểm cân bằng

Bằng cách sử dụng một định lý mở rộng của Định lý ổn định Lyapunov [9, Theorem 3.3] chúng ta chỉ ra tính chất ổn định toàn cục của tập hợp điểm cân bằng.

1. **Trường hợp $R_0 < 1$**

Trường hợp này trên tập $D = \{(x, y\} \in \boldsymbol{R}^2 : x, y \geq 0;\ x + y \leq 1\}$ mô hình (1) chỉ có duy nhất điểm cân bằng $E_1 = (\frac{\lambda}{\lambda+e}, 0)$. Chúng ta cần xác định điều kiện đặt lên hàm φ sao điểm cân bằng E_1 là ổn định tiệm cận toàn cục của phương trình (3), tức là E_1 là ổn định tiệm cận địa phương và điểm hút toàn cục.

Định lý 3. *Nếu hàm φ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 2 thì điểm cân bằng E_1 là ổn định tiệm cận toàn cục của phương trình (3) trên tập D.*

Chứng minh. Sử dụng một mở rộng của Định lý ổn định Lyapunov [9, Theorem 3.3] ta sẽ chỉ ra tính chất ổn định toàn cục của E_1.

Xét hàm $V(x, y) = \left(x + y - \frac{\lambda}{\lambda+e}\right)^2$ trên tập D. Ta chỉ ra hàm $V(x, y)$ thỏa mãn 4 điều kiện trong Định lý [9, Theorem 3.3] trên miền D (thay vì trên $\boldsymbol{R}^2$ vì ta chỉ xét tính chất ổn định toàn cục trên D). Rõ ràng hàm $V(x, y)$ là liên tục trên D. Hơn nữa

1) $V(x, y) \geq 0$ với mọi $(x, y) \in D$ và $V(E_1) = 0$.

2) Ta có

$$\begin{aligned}\Delta V(x_k, y_k) = V(x_{k+1}, y_{k+1}) - V(x_k, y_k) &= \left(x_{k+1} + y_{k+1} - \frac{\lambda}{\lambda+e}\right)^2 - \left(x_k + y_k - \frac{\lambda}{\lambda+e}\right)^2 \\ &= (x_{k+1} + y_{k+1} - x_k - y_k)\left(x_{k+1} + y_{k+1} + x_k + y_k - \frac{2\lambda}{\lambda+e}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Ta để ý rằng: Do tính chất (P_1) của mô hình được bảo toàn nên với mọi giá trị ban đầu thuộc D và $x(0) + y(0) \geq \frac{\lambda}{\lambda+e}$ thì

$$x_{k+1} + y_{k+1} \le x_k + y_k, \quad x_k + y_k \ge \frac{\lambda}{\lambda + e}, \quad x_{k+1} + y_{k+1} \ge \frac{\lambda}{\lambda + e}. \tag{12}$$

Tương tự, với mọi giá trị ban đầu thuộc D và $x(0) + y(0) \le \frac{\lambda}{\lambda+e}$ thì

$$x_{k+1} + y_{k+1} \ge x_k + y_k, \quad x_k + y_k \le \frac{\lambda}{\lambda + e}, \quad x_{k+1} + y_{k+1} \le \frac{\lambda}{\lambda + e}. \tag{13}$$

Vì thế từ (11), (12), (13) ta nhận được $\Delta V(x, y) \le 0$ với mọi $(x, y) \in D$. Do đó, điều kiện (2) của Định lý được thỏa mãn.

3) Mặt khác, từ (11) ta thấy rằng $\Delta V(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $(x, y) \in \{(x, y\} \in D | \, x + y = \frac{\lambda}{\lambda+e}\}$. Do tính chất (P_1) được bảo toàn nên trong trường hợp này ta có $G^* = \{(x, y\} \in D | \, x + y = \frac{\lambda}{\lambda+e}\}$. Ta cần chỉ ra E_1 là G^*-ổn định toàn cục, tức là E_1 là ổn định địa phương trên G^* và với mọi giá trị ban đầu thuộc G^* thì $(x_k, y_k) \to E_1$ khi $k \to \infty$. Thật vậy:

Nếu các giá trị ban đầu thuộc tập G^*, tức là thỏa mãn $x_0 + y_0 = \frac{\lambda}{\lambda+e}$ thì từ (6) ta thấy nghiệm của (3) thỏa mãn $x_k + y_k = \frac{\lambda}{\lambda+e}$ với mọi k, hay tương đương với $x_k = \frac{\lambda}{\lambda+e} - y_k$. Thế vào (5) ta thu được

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \frac{(1 - \varphi\delta)y_k + \varphi\beta y_k(\frac{\lambda}{\lambda+e} - y_k)}{1 + \varphi e} \le \frac{\left(1 - \varphi\delta + \varphi\beta \frac{\lambda}{\lambda+e}\right) y_k}{1 + \varphi e} \le \cdots \\ &\le \left(\frac{1 - \varphi\delta + \varphi\beta \frac{\lambda}{\lambda+e}}{1 + \varphi e}\right)^{k+1} y_0. \end{aligned} \tag{14}$$

Do φ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 2 nên $\varphi < \frac{1}{\delta}$ do đó $\frac{1 - \varphi\delta + \varphi\beta \frac{\lambda}{\lambda+e}}{1 + \varphi e} > 0$. Mặt khác do $R_0 < 1$ nên $\frac{1 - \varphi\delta + \varphi\beta \frac{\lambda}{\lambda+e}}{1 + \varphi e} < 1$. Do đó, từ (14) suy ra $y_k \to 0$ khi $k \to \infty$, tức là $y = 0$ là điểm hút toàn cục. Bên cạnh đó, từ (14) ta thấy

$$\frac{dy_{k+1}}{dy_k}(0) = \frac{1 - \varphi\delta + \varphi\beta \frac{\lambda}{\lambda+e}}{1 + \varphi e} \in (0, 1). \tag{15}$$

Do đó $y = 0$ là ổn định tiệm cận địa phương. Kết hợp với $y = 0$ là hút toàn cục nên nó là ổn định toàn cục. Mặt khác do tính chất (P_1) được bảo toàn nên rõ ràng E_1 là là G^*-ổn định toàn cục. Từ đó điều kiện (3) của Định lý được thỏa mãn.

4) Do tính chất (P_2) được bảo toàn nên hiển nhiên mọi nghiệm của (3) đều bị chặn trên D.

Như vậy, các điều kiện của định lý mở rộng của Định lý ổn định Lyapunov được thỏa mãn nên E_1 là ổn định toàn cục trên D. Từ đó định lý được chứng minh.

2. **Trường hợp $R_0 > 1$**

Ta để ý rằng nếu xuất phát từ giá trị ban đầu $y_0 = 0$ thì từ (5) ta nhận được nghiệm của (3) là

$$y_k = 0, \quad x_{k+1} = \frac{x_k + \varphi\lambda}{1 + \varphi(\lambda + e)}.$$

Do đó dễ dàng chỉ ra trong trường hợp này $(x_k, y_k) \to E_1$ và E_1 là ổn định tiệm cận toàn cục. Vì thế trong trường hợp $R_0 > 1$ ta chỉ xét giá trị ban đầu thuộc vào tập $D^* = \{(x, y\} \in \boldsymbol{R}^2 : x \ge 0; y > 0; \, x + y \le 1\}$. Nếu $R_0 > 1$ thì E_2 là điểm cân bằng duy nhất thuộc vào D^*. Ta cần chỉ ra tính chất ổn định tiệm cận toàn cục trong D^* của E_2.

Định lý sau đây được phát biểu và chứng minh tương tự Định lý 3.

Định lý 4. *Nếu hàm φ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 2 thì điểm cân bằng E_2 là ổn định tiệm cận toàn cục của phương trình (3) trên tập D^*.*

Chú ý 1*. Hàm $V(x, y)$ được xây dựng trong chứng minh Định lý 3 không thỏa mãn các điều kiện của Định lý ổn định toàn cục Lyapunov cổ điển trên tập $\{(x, y\} \in D | \, x + y = \frac{\lambda}{\lambda+e}\}$. Vì thế ở đây thay vì sử dụng Định lý ổn định Lyapunov cổ điển chúng ta sử dụng một mở rộng của Định lý ổn định Lyapunov cổ điển.*

Chú ý 2. *Mấu chốt quan trọng trong chứng minh tính chất ổn định tiệm cận toàn cục của hai điểm cân bằng E_1 và E_2 là xây dựng được hàm Lyapunov (mở rộng). Trong trường hợp này, tính chất (P_1) và (P_2) có vai trò đặc biệt quan trọng trong việc xây dựng hàm Lyapunov. Nói cách khác thì tính chất ổn định toàn cục của lược đồ sai phân có liên kết chặt chẽ với tính chất (P_1) và (P_2) của mô hình. Nếu không có hai tính chất này thì việc chỉ ra hàm Lyapunov là cực kỳ khó khăn và phức tạp.*

Chú ý 3. *Có thể áp dụng các kỹ thuật trong phần này cho các lược đồ sai phân mà chúng tôi đã đề xuất trước đó [1] để chứng minh tính chất ổn định toàn cục của tập hợp điểm cân bằng.*

D. Tính chất không tuần hoàn của nghiệm

Nhờ tiêu chuẩn Dulax ta dễ dàng chỉ ra mô hình (1) không có nghiệm tuần hoàn. Đối với các phương trình sai phân việc chỉ ra tính chất không tuần hoàn của nghiệm phức tạp hơn rất nhiều. Tuy nhiên, do điểm cân bằng là ổn định toàn cục nên rõ ràng lược đồ sai phân (3) cũng không thể có nghiệm tuần hoàn.

Tổng hợp các kết quả ta nhận được các lược đồ bảo toàn chính xác các tính chất cho mô hình (1).

Định lý 5. Lược đồ sai phân (3) bảo toàn tính chất $(P_1) - (P_5)$ của mô hình (1) nếu hàm $\varphi(h)$ thỏa mãn điều kiện

$$\varphi(h) < \varphi^* \coloneqq \min\left\{\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\beta\lambda + \beta + \beta e}, 1\right\}, \qquad \forall h > 0. \tag{16}$$

Chú ý 4. *Có rất nhiều cách để lựa chọn hàm φ thỏa mãn điều kiện (16), chẳng hạn ta có thể chọn hàm*

$$\varphi(h) = \frac{1-e^{-\tau h}}{\tau}, \ \tau > \frac{1}{\varphi^*}.$$

III. CÁC THỬ NGHIỆM SỐ

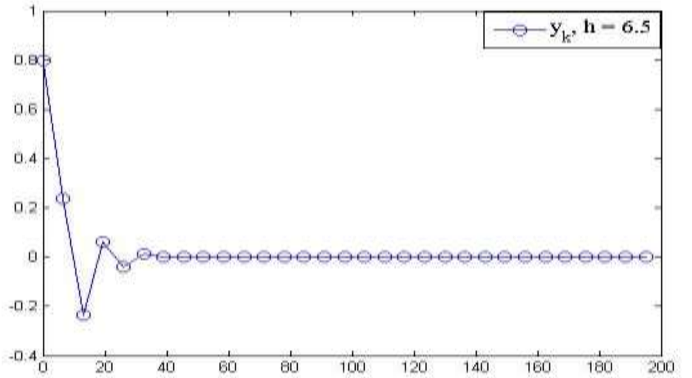
Trong phần này chúng tôi trình bày một vài thử nghiệm số nhằm chỉ ra rằng các kết quả lý thuyết nhận được bên trên là hoàn toàn chính xác.

A. Trường hợp $R_0 < 1$

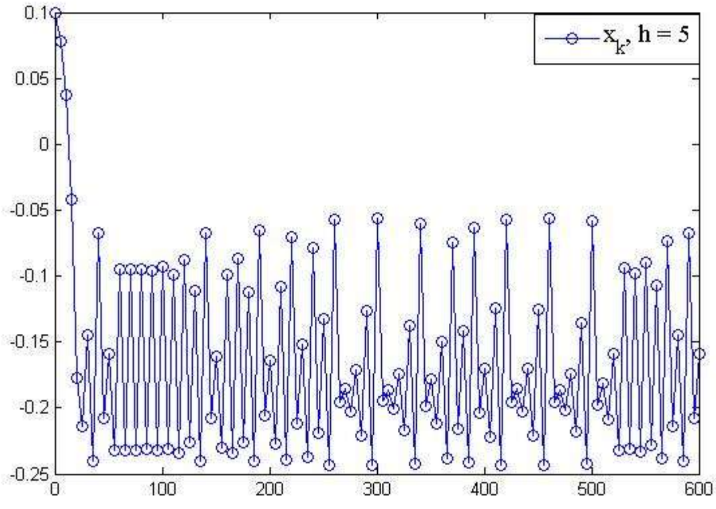
Xét mô hình (1) với các tham số $\beta = 0.8$, $\lambda = 0.1$, $\delta = 0.2$, $e = 0.3$. Trong trường hợp này $R_0 = 0.4 < 1$. Mô hình có hai điểm cân bằng là $E_1 = (0.25, 0)$ và $E_2 = (-0.625, 0.375)$, trong đó E_1 là điểm cân bằng ổn định toàn cục, còn E_2 là điểm cân bằng không ổn định.

Nghiệm số thu được từ các phương pháp Runge-Kutta bốn nấc kinh điển (classical four stage Runge–Kutta method), phương pháp Runge-Kutta hiển hai nấc (two stage Runge–Kutta method) và phương pháp Euler hiển (explicit Euler method) được biểu diễn lần lượt trong các Hình 1-3. Ta thấy rằng phương pháp Runge-Kutta bốn nấc không bảo toàn được tính chất nghiệm dương của mô hình. Phương pháp Runge-Kutta hai nấc và phương pháp Euler hiển có nghiệm dao động xung quanh điểm cân bằng E_1 với biên độ dao động tăng dần. Khi xem xét nghiệm của mô hình trên khoảng thời gian càng lớn thì dao động xảy ra càng mạnh. Nghiệm số thu được trong các trường hợp này không thể bảo toàn các tính chất của mô hình (1). Nói chung, các phương pháp sai phân bình thường như Runge-Kutta và Taylor chỉ bảo toàn tính chất của bài toán khi bước lưới được chọn đủ nhỏ.

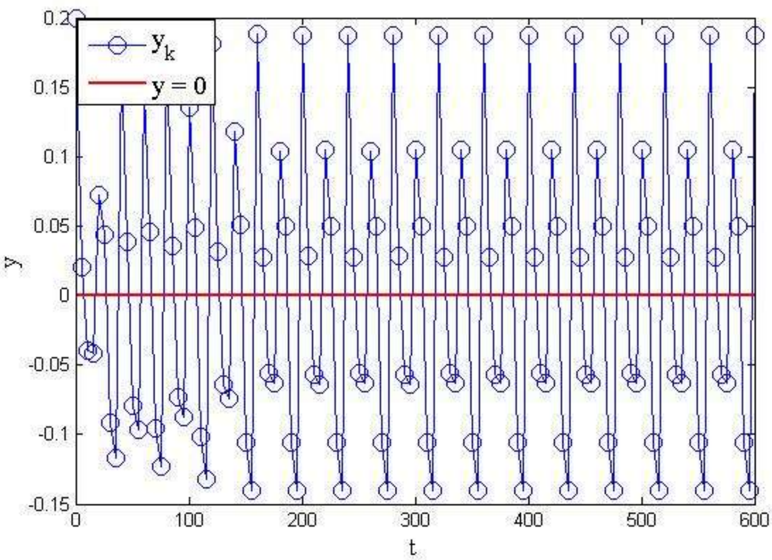
Nghiệm số thu được từ lược đồ (3) được biểu diễn trong Hình 4, ở đây ta chọn $\tau = 5$. Trong hình mỗi cặp đường màu xanh và màu đỏ tương ứng với một cặp nghiệm x_k và y_k. Trường hợp này, lược đồ (3) bảo toàn các tính chất của mô hình (1). Tương tự như vậy, khi ta chọn bước lưới bất kỳ thì tính chất của mô hình vẫn được bảo toàn nhờ lược đồ (3).



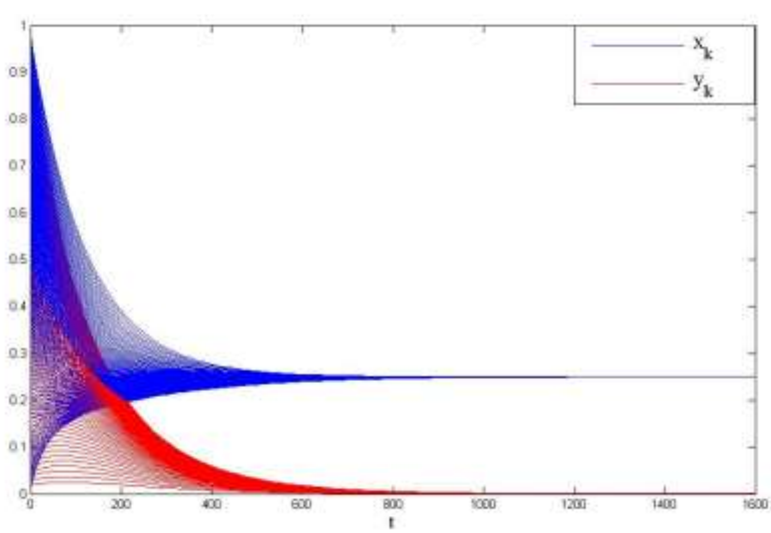
Hình 1. Phương pháp Runge-Kutta bốn nấc kinh điển với $h = 6.5, x(0) = 0.1, y(0) = 0.8$



Hình 2. Phương pháp Runge-Kutta hai nấc với $h = 5, x(0) = 0.1,\ y(0) = 0.4$



Hình 3. Phương pháp Euler hiển với $h = 5, x(0) = 0.4,\ y(0) = 0.2$

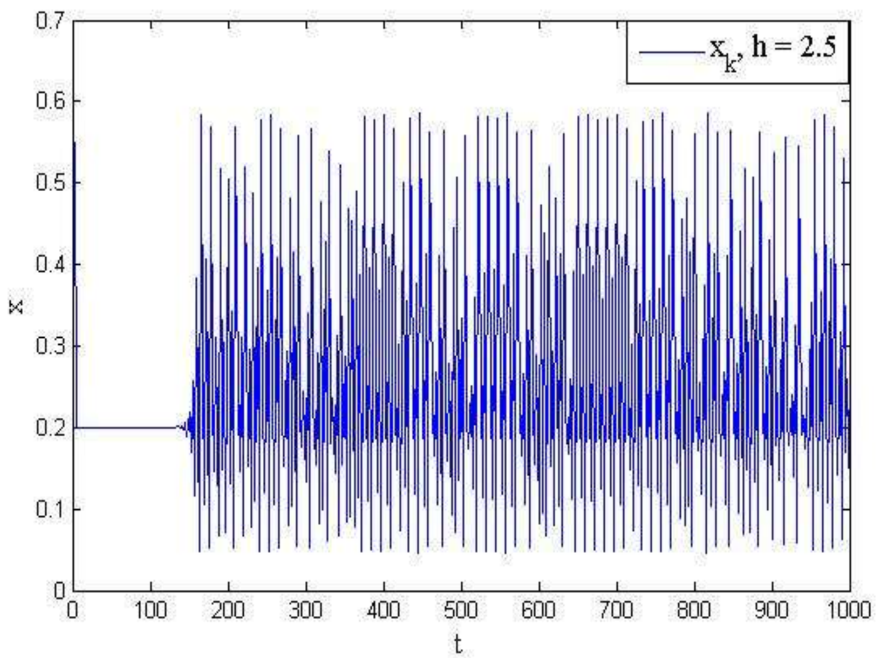


Hình 4. Lược đồ (3) với bước lưới $h = 10$

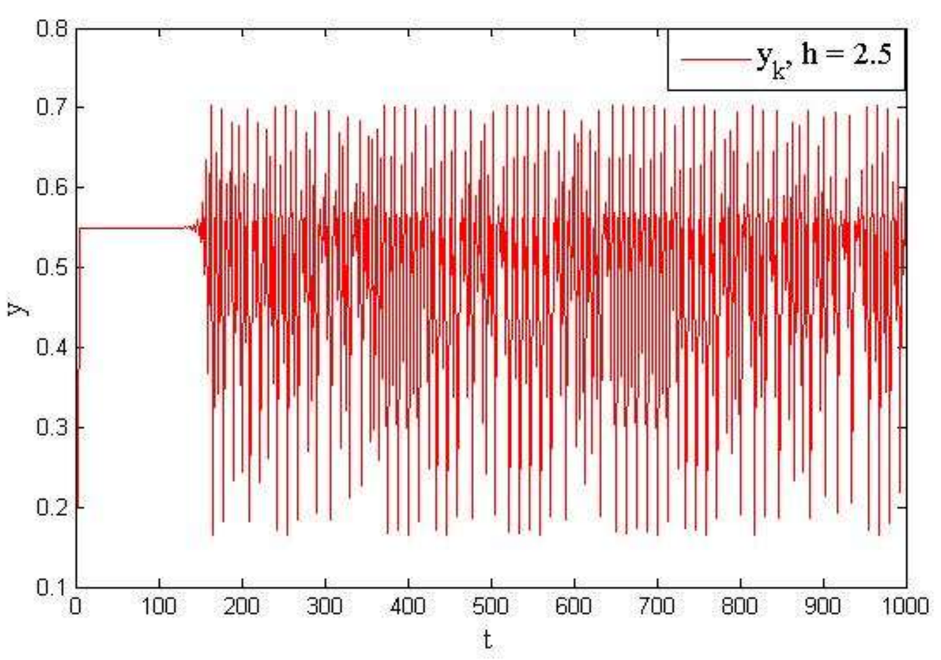
B. Trường hợp $R_0 > 1$

Ta xét mô hình (1) với các tham số $\beta = 2$, $\lambda = 0.3$, $\delta = 0.3, e = 0.1$. Trường hợp này $R_0 = 3.75 > 1$. Mô hình có hai điểm cân bằng là E_1 = (0.75, 0) và E_2 = (0.2, 0.55), trong đó E_2 là điểm cân bằng ổn định toàn cục, còn E_1 là điểm cân bằng không ổn định.

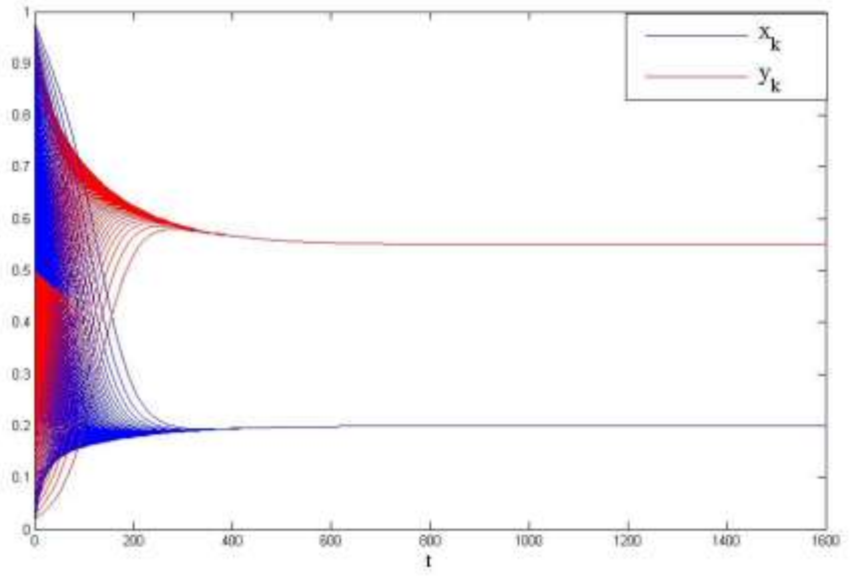
Tương tự như trường hợp $R_0 < 1$, các lược đồ sai phân bình thường như Runge-Kutta hay Taylor chỉ bảo toàn được tính chất của mô hình khi bước lưới được chọn rất nhỏ. Nghiệm số thu được từ phương pháp Euler hiển với bước lưới $h = 2.5$ được biểu diễn trong Hình 5 và 6 tương ứng. Trường hợp này các tính chất của mô hình không được bảo toàn. Nghiệm số thu được dao động mạnh xung quanh điểm cân bằng E_2. Cuối cùng, nghiệm số thu được từ lược đồ (3) với $k = 5$ được biểu diễn trong Hình 7. Các tính chất của mô hình được bảo toàn chính xác nhờ lược đồ (3).



Hình 5. Nghiệm số thu được từ phương pháp Euler hiển



Hình 6. Nghiệm số thu được từ phương pháp Euler hiển



Hình 7. Lược đồ (3) với bước lưới $h = 10$

IV. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, lược đồ sai phân khác thường cho mô hình siêu quần thể được xây dựng. Tính chất ổn định của mô hình rời rạc được nghiên cứu dựa trên một mở rộng của Định lý ổn định Lyapunov. Nhờ đó chúng tôi xây dựng được lược đồ sai phân bảo toàn tất cả các tính chất của mô hình siêu quần thể. So với cách xây dựng của chúng tôi trước đó, cách xây dựng này ngắn gọn và đơn giản hơn rất nhiều. Ở đây, không cần thực hiện các tính toán phức tạp và các kỹ thuật khó. Cách tiếp cận này khắc phục được các hạn chế của các cách tiếp cận trước đó và có thể được áp dụng cho các lớp bài toán khác tương tự. Trong tương lai chúng tôi sẽ phát triển kết quả này để xây dựng các mô hình rời rạc bảo toàn các tính chất của các mô hình liên tục khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Dang Quang A, Hoang Manh Tuan, "Dynamically consistent discrete metapopulation model", Journal of Difference Equations and Applications, **DOI:** 10.1080/10236198.2016.1197213, 2016.

[2] Linda. J. S. Allen, "An Introduction to Mathematical Biology, Prentice Hall", New Jersey, 2007.

[3] P. Amarasekare and H. Possingham, "*Patch dynamics and metapopulation theory: The case of successional species"*, J. Theor. Biol. 209 (2001), pp. 333–344.

[4] F. Brauer, C. Castillo - Chavez, "Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology", Springer New York, 2001.

[5] T. D. Dimitrov, H. V. Kojouharov, "Nonstandard finite difference schemes for general two - dimensional autonomous dynamical systems", Applied Mathematics Letters, 18, pp. 769–774, 2005.

[6] T. D. Dimitrov, H. V. Kojouharov, "Stability - Preserving Finite - Difference Methods For General Multi - Dimensional Autonomous Dynamical Systems", International Journal Of Numerical Analysis And Modeling, 4(2), pp. 280 – 290, 2007.

[7] T. D. Dimitrov, H. V. Kojouharov, "Dynamically consistent numerical methods for general productive– destructive systems", Journal of Difference Equations and Applications, 17(12), pp. 1721-1736, 2011.

[8] S. Elaydi, "An Introduction to Difference Equations", Springer Science+Business Media, Inc, 2005.

[9] A. Iggidr, M. Bensoubaya, "New Results on the Stability of Discrete-Time Systems and Applications to Control Problems", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 291, pp. 392-414, 1998.

[10] Hristo V. Kojouharov, Daniel T. Wood, "A class of nonstandard numerical methods for autonomous dynamical systems", Applied Mathematics Letters, 50, pp.78 – 82, 2015.

[11] Keymer, J. E., P. A. Marquet, J. X. Velasco-Hernandez, and. S. A. Levin, "Extinction thresholds and metapopulation persistence in dynamic landscapes", THE AMERICAN NATURALIST, 156(5), pp. 478-494, 2000.

[12] R. E. Mickens, "Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations", World Scientific, Singapore, 1994.

[13] R. E. Mickens, "Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes", World Scientific, Singapore, 2000.

[14] R. E. Mickens, "Nonstandard Finite Difference Schemes for Differential Equations", Journal of Difference Equations and Applications, 8(9), pp. 823 – 847, 2005.

[15] L. -I. W. Roeger, "Periodic solutions preserved by nonstandard finite-difference schemes for Lotka-Volterra system: a different approach", Journal of Difference Equations and Applications, 14, pp. 481 – 493, 2008.

[16] L. -I. W. Roeger, "Nonstandard finite-difference schemes for the Lotka-Volterra systems: generalization of Mickens's method", Journal of Difference Equations and Applications , 12, pp. 937 – 948, 2006.

[17] Alexander A. Samarskii, "The theory of difference schemes", Marcel Dekker, Inc, 2001.

[18] D. T. Wood, T. D. Dimitrov, H. V. Kojouharov, "A nonstandard finite difference method for n-dimensional productive-destructive systems", Journal of Difference Equations and Applications, **DOI:** 10.1080/10236198.2014.997228, 2015.

NONSTANDARD FINITE DIFFERENCE SCHEMES FOR NUMERICAL SIMULATION OF A METAPOPULATION MODEL: USING THE LYAPUNOV STABILITY THEOREM

Dang Quang A, Hoang Manh Tuan

ABSTRACT *— In this paper nonstandard finite difference (NSFD) schemes for a metapopulation model are constructed. The stability properties of the discrete models are investigated by the use of a generalization of Lyapunov stability theorem. Due to this result we have proved that the NSFD schemes preserve all properties of the metapopulation model. Numerical examples confirm the obtained theoretical results of the properties of the constructed difference schemes. The method of Lyapunov functions proves to be much simpler than the standard method for studying stability of the discrete metapopulation model in our very recent paper.*