

MÔ HÌNH HÓA MẶT CONG THAM SỐ BẬC THẤP TỪ LƯỚI TAM GIÁC DỰA TRÊN PHƯƠNG PHÁP DỊCH CHUYỂN HÌNH HỌC CỤC BỘ

Lê Thị Thu Nga¹, Nguyễn Tấn Khôi², Nguyễn Thanh Thủy³

¹Khoa Công nghệ thông tin, Đại học Quy Nhơn, Việt Nam

²Khoa Công nghệ thông tin, Đại học Bách khoa, Đại học Đà Nẵng, Việt Nam

³Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội, Việt Nam

lenga248@gmail.com, ntkhoi@dut.udn.vn, nguyenthanhthuy@vnu.edu.vn

TÓM TẮT— Tái tạo mặt cong tham số từ lưới tam giác, đặc biệt là mặt cong tham số bậc thấp, có ý nghĩa quan trọng và mang lại nhiều ứng dụng thực tiễn trong lĩnh vực tái tạo ngược, thực tại ảo và hỗ trợ thiết kế. Bài báo này đề xuất một phương pháp mới nhằm tái tạo các mặt cong trên miền tham số tam giác có bậc thấp (cụ thể là các mặt Bézier, B-patch và B-spline) dựa trên phương pháp dịch chuyển hình học cục bộ và lược đồ tái hợp mảnh. Bằng cách sử dụng lược đồ tái hợp mảnh nhằm thô hóa lưới điều khiển của mặt cong và điều chỉnh cục bộ các điểm điều khiển thông qua mỗi bước dịch chuyển hình học, các mặt cong được tái tạo xấp xỉ với hầu hết các điểm dữ liệu của lưới tam giác ban đầu mà không cần phải giải các hệ phương trình tuyến tính phức tạp. Độ chính xác của mặt cong tham số tái tạo đạt được bằng cách điều chỉnh vị trí các điểm điều khiển và đảm bảo nút trong mỗi bước lặp. Các kết quả thực nghiệm cho thấy phương pháp đề xuất đơn giản, mềm dẻo, hiệu quả và có thể áp dụng được với lưới tam giác có hình dạng bất kỳ.

Từ khóa — Mặt cong tham số, lưới tam giác, dịch chuyển hình học, tái hợp mảnh, tái tạo mặt cong.

I. GIỚI THIỆU

Trong mô hình hóa hình học, mặt cong trơn thường được dùng để mô tả bề mặt của các đối tượng thực. Dạng thường dùng của mặt cong trơn là mặt cong phân mảnh hoặc mặt cong tham số [9]. Mặc dù mặt cong phân mảnh đã trở nên phổ biến và cho phép biểu diễn bề mặt đa mức với hình dáng bất kỳ, nhưng loại mặt cong này khó có thể tính toán chính xác vị trí của từng điểm trên bề mặt cũng như khó điều khiển hình dáng bề mặt một cách cục bộ [5]. Trong khi đó, mặt cong tham số không chỉ cho phép biểu diễn bề mặt mềm mượt với độ liên tục cao, ổn định, mềm dẻo và điều chỉnh bề mặt cục bộ mà còn cung cấp các phép toán, giải thuật chi tiết để xác định vị trí của một điểm bất kỳ trên bề mặt một cách chính xác và hiệu quả. Các mặt cong tham số như Bézier, B-spline hoặc NURBS trên miền tham số tứ giác từ lâu đã trở thành công cụ đặc lực và là chuẩn công nghiệp trong các hệ thống CAD/CAM [8].

Dựa trên miền tham số, chúng tôi có thể phân chia các mặt cong tham số thành hai loại: mặt cong tham số tứ giác và mặt cong tham số tam giác. Với mặt cong tham số tứ giác, hay còn gọi là mặt cong tích tensor, các điểm thuộc mặt cong này có thể xác định chính xác bằng giải thuật de Boor. Hơn nữa, mặt cong tham số tứ giác còn sở hữu các thuộc tính quan trọng của B-spline một biến như: bao lồi, bất biến affine, điều khiển cục bộ và trực giác...[8]. Tuy nhiên, vốn dĩ các mặt cong này thường có bốn góc, dạng tứ giác, nên nếu miền tham số không thể phân chia thành các tứ giác thì mặt cong này không thích hợp cho việc mô phỏng bề mặt có hình dạng bất kỳ của một đối tượng thực. Trong khi đó, việc phân chia miền tham số thành một lưới phẳng các tam giác thường tự nhiên và dễ dàng hơn rất nhiều. So với mặt cong tham số tứ giác thì mặt cong trên miền tham số tam giác, hay Spline hai biến, không chỉ sở hữu các ưu điểm của B-spline một biến mà còn cho phép kết nối mềm dẻo và phù hợp với bề mặt có hình dạng bất kỳ. Mặt khác, vì lưới điều khiển của loại mặt cong này là lưới tam giác, hay lưới không cấu trúc, nên chúng cho phép biểu diễn với độ phân giải đa tỉ lệ và phù hợp với dạng hình học phức tạp, ghép nối linh hoạt và xử lý hiệu quả [13]. Ngoài ra, bậc đa thức của mặt cong tham số tam giác thấp hơn so với bậc đa thức của mặt cong tham số tứ giác nên tiết kiệm chi phí tính toán hơn [9]. Với một số ưu điểm đặc thù, các mặt cong tham số tam giác, đặc biệt là B-spline tam giác, đóng vai trò quan trọng và có triển vọng trong việc mô hình hóa hình học các bề mặt có hình dạng phức tạp cũng như thiết kế linh hoạt.

Gần đây, nhờ vào đặc điểm biểu diễn bề mặt đa mức với hình dáng tự do, mặt cong phân mảnh cũng đang trở nên phổ biến trong đồ họa máy tính và mô hình hóa hình học, đặc biệt chúng được ứng dụng rộng rãi trong công nghệ làm film hoạt hình và game 3D. Đây được xem như cầu nối giữa lưới điều khiển của mặt cong tham số và mặt cong trơn giới hạn thông qua việc áp dụng các luật phân mảnh lặp đi lặp lại trên lưới điều khiển [5]. Phân mảnh là một quá trình thêm các điểm và các mặt mới vào trong một lưới thô để tạo ra một lưới mịn hơn. Ngược lại, tái hợp mảnh nhằm mục đích đạt được lưới thô từ một lưới mịn. Vì quá trình tái hợp mảnh có thể dừng lại sau mỗi bước nên ta có thể thu được các biểu diễn đa mức khác nhau tại mỗi bước tái hợp mảnh.

Tái tạo mặt cong trơn từ lưới đa giác vẫn đang là một trong những lĩnh vực nghiên cứu thiết thực và ngày càng được ứng dụng rộng rãi trong đồ họa máy tính, CAGD, đặc biệt là trong công nghệ tái tạo ngược và thực tại ảo. Tuy nhiên, đây vẫn đang là lĩnh vực khó khăn và thách thức vì phải đối mặt với các vấn đề như: tham số hóa lưới, xây dựng lưới điều khiển, tối thiểu lỗi dịch chuyển, ước lượng mặt cong,... Do đó, làm thế nào để tái tạo mặt cong trơn từ lưới đa giác có hình dạng bất kỳ với độ chính xác cao vẫn đang là câu hỏi mở và luôn mang ý nghĩa thực tiễn.

Các phương pháp tái tạo mặt cong trơn có thể được chia làm hai loại: nội suy và xấp xỉ. Đối với phương pháp nội suy, các điểm dữ liệu có dạng lưới và được xếp thành các hàng, các cột. Mặt cong được tái tạo là mặt cong đi qua các điểm dữ liệu này. Ngược lại, phương pháp xấp xỉ cho ra mặt cong gần sát với các điểm dữ liệu, tối thiểu hóa độ lệch giữa mặt cong và các điểm dữ liệu. Các điểm dữ liệu trong phương pháp xấp xỉ có thể phân bố ngẫu nhiên [19]. Hầu hết, các phương pháp tái tạo truyền thống là nội suy các mặt cong trơn bằng cách giải các hệ phương trình tuyến tính và giải quyết các vấn đề bình phương tối thiểu [7][12][14]. Mặc dù các phương pháp này đã sinh ra các mặt cong nội suy qua các điểm dữ liệu, song các mặt cong này xuất hiện các gợn mấp mô, không được trơn mượt do bậc cao, không trực quan và chi phí tính toán lớn. Để vượt qua các hạn chế này, gần đây các phương pháp xấp xỉ lặp lại đang được nghiên cứu và mở rộng. Khác với phương pháp truyền thống, các phương pháp này không chỉ tránh được chi phí tính toán lớn do phải giải các hệ phương trình tuyến tính mà còn sinh ra một loạt các mặt cong xấp xỉ tốt bằng cách cập nhật và thay đổi vị trí các điểm điều khiển dựa trên kết quả tính toán khoảng cách giữa các điểm dữ liệu với mặt cong. Các tiếp cận này mặc dù đã thu được kết quả khích lệ, nhưng nhìn chung chúng thường tạo ra các mặt cong phân mảnh [2][14][20] hoặc mặt cong trên miền tham số tứ giác [1][11][17][21]. Để biểu diễn bề mặt của một đối tượng có hình dáng tự do, các phương pháp này thường chia mặt cong biểu diễn bề mặt đối tượng thành tập các mảnh cong và lần lượt tái tạo các mảnh cong này, sau đó ghép nối chúng lại để tạo thành một mặt cong trơn hoàn chỉnh. Vì ghép nối nên mặt cong kết quả xuất hiện các nếp gấp hoặc kẽ hở giữa các mảnh cong liền kề. Bên cạnh đó, một số phương pháp tái tạo các dạng mặt cong trên miền tham số tam giác, như tái tạo Bézier tam giác [10], B-patch[16][22], Spline đơn hình [15] và B-spline tam giác [6][18], cũng đã được nghiên cứu và cải tiến. Mặc dù các nghiên cứu này đã tạo ra các mặt cong trơn toàn cục nhưng một vài kết quả không thể điều khiển cục bộ hình dạng mặt cong. Hơn nữa, vì dùng lưới ban đầu như lưới điều khiển của mặt cong nên mặt cong kết quả có bậc khá cao, do đó xuất hiện các mấp mô đặc trưng và làm tăng chi phí tính toán.

Xuất phát từ các ưu điểm của mặt cong trên miền tham số tam giác, cũng như lợi ích của tái hợp mảnh nhằm giảm bậc của mặt cong tham số được tái tạo, và thông qua tìm hiểu các phương pháp chuyển đổi một lưới đa giác sang mặt cong trơn, trong bài báo này chúng tôi đề xuất một phương pháp nhằm mô hình hóa mặt cong tham số bậc thấp từ lưới tam giác dựa trên dịch chuyển hình học cục bộ. Phương pháp đề xuất gồm ba bước chính: đầu tiên, tạo lưới điều khiển của mặt cong dịch chuyển từ lưới tam giác ban đầu bằng cách áp dụng lược đồ tái hợp mảnh. Tiếp theo, cập nhật các điểm điều khiển cũng như các đám mây nút trong miền tham số tam giác của mặt cong. Cuối cùng, dịch chuyển cục bộ mặt cong dần hội tụ về các điểm dữ liệu của lưới tam giác ban đầu. Đóng góp chính của nghiên cứu này là đề xuất giải pháp tái tạo mặt cong tham số có hình dạng bất kỳ (với B-spline tam giác) từ lưới tam giác mà không cần phải giải bất kỳ hệ phương trình tuyến tính nào. Trái với phương pháp truyền thống, phương pháp của chúng tôi tránh được các vấn đề về phụ thuộc tham số và bình phương tối thiểu. So với các tiếp cận gần đây, vì sử dụng lược đồ tái hợp mảnh nên kỹ thuật của chúng tôi tái tạo được các mặt cong tham số có bậc thấp nội suy qua hầu hết các điểm dữ liệu của lưới tam giác ban đầu sau một số bước dịch chuyển hình học cục bộ.

Phần còn lại của bài báo gồm các nội dung chính sau: Phần 2 trình bày các mặt cong trên miền tham số tam giác cũng như các thuộc tính đặc trưng của chúng. Lược đồ tái hợp mảnh được mô tả ở Phần 3. Trong Phần 4, chúng tôi chi tiết giải thuật đề xuất. Phần 5 trình bày các kết quả thực nghiệm. Và cuối cùng, một số kết luận và hướng nghiên cứu tiếp theo được nêu ra trong Phần 6.

II. MẶT CONG TRÊN MIỀN THAM SỐ TAM GIÁC

Nhằm tái tạo các mặt cong trên miền tham số tam giác và có thể điều chỉnh cục bộ hình dáng của các mặt cong này thông qua các điểm điều khiển, trong phần này, chúng tôi trình bày mặt cong tham số B-spline tam giác, còn các mặt cong tham số Bézier tam giác và B-patch có thể tham khảo trong [9][18].

Mặt cong B-spline tam giác, hay còn gọi là DMS-spline, là sự kết hợp trơn mềm toàn cục của mặt cong Spline đơn hình và điều khiển cục bộ của B-patch.

Cho điểm u và tập các nút $V = \{v_0, \dots, v_{n+2}\} \subset \square^2$, mặt cong Spline đơn hình hai biến $M(u/V)$ bậc n được định nghĩa đệ quy như sau [4]:

- Với $n=0$, gọi $[V]$ là bao lồi nửa mở của tam giác V thì:

$$M(u/V) = \begin{cases} 0 & \text{if } u \in [V] \\ \frac{1}{|\det(V)|} & \text{if } u \notin [V] \end{cases} \quad (1)$$

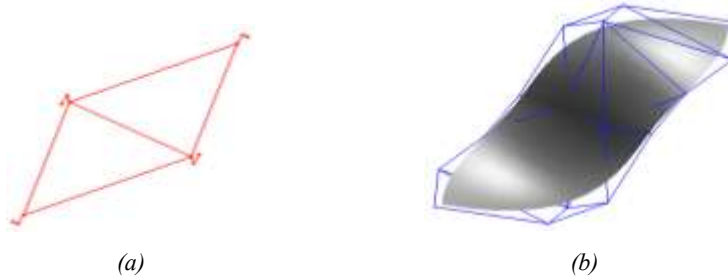
- Với $n>0$, chọn tập $W = \{w_0, w_j, w_2\} \subset V$ gồm ba điểm sao cho ba điểm này tạo thành một tam giác. Gọi $\lambda_j(u/W)$ là tọa độ tâm của u ứng với tam giác W , khi đó:

$$M(u/V) = \sum_{j=0}^2 \lambda_j(u/W) M(u/V \setminus \{w_j\}) \quad (2)$$

Gọi $T \subset \square^2$ là một lưới tam giác phẳng có hình dạng bất kỳ. Với mỗi đỉnh $v_i \in T$, thêm vào $n+1$ nút $\{v_{i,0}, \dots, v_{i,n}\}$ với $v_{i,0} \equiv v_i$ để tạo thành một đám mây nút của đỉnh này. Với mỗi tam giác $I = (v_0, v_1, v_2) \in T$ và $|\beta| = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = n$, chọn $(n+1)(n+2)/2$ tập con $V_\beta^I = \{v_{0,0}, \dots, v_{0,\beta_0}, v_{1,0}, \dots, v_{1,\beta_1}, v_{2,0}, \dots, v_{2,\beta_2}\}$ gồm $n+3$ nút từ 3 đám mây nút liên kết với tam giác này. Mỗi tập con như vậy sẽ là miền tham số sinh ra một Spline đơn hình $M(u/V_\beta^I)$ bậc n . Kết hợp tuyến tính của các Spline đơn hình này là mặt cong B-spline tam giác S có bậc n , đạt liên tục C^{n-1} trên miền tham số tam giác $T \subset \square^2$:

$$S(u) = \sum_{I \in T} \sum_{|\beta|=n} N_\beta^I(u) P_\beta^I \tag{3}$$

Ở đây, Spline đơn hình là các hàm cơ sở và được chuẩn hóa để đảm bảo có tổng bằng 1, khi đó, $N_\beta^I(u) = |det(\tilde{V}_\beta^I)| M(u/V_\beta^I)$ với $\tilde{V}_\beta^I = \{v_{0,\beta_0}, v_{1,\beta_1}, v_{2,\beta_2}\}$ được gọi là B-spline được chuẩn. Các hệ số $P_\beta^I \in \square^3$ được gọi là các điểm điều khiển B-spline.



Hình 1. Mặt cong B-spline tam giác bậc 3: (a) miền tham số và (b) mặt cong cùng với lưới điều khiển

Mặt cong B-Spline trên miền tam giác thừa hưởng các thuộc tính mong muốn từ Spline đơn hình và B-patch như [4]: bất biến affine, bao lồi, điều khiển cục bộ, liên tục tự động, trơn mềm toàn cục, khả năng biểu diễn bề mặt có hình dạng bất kỳ với các thành phần sắc nhọn.

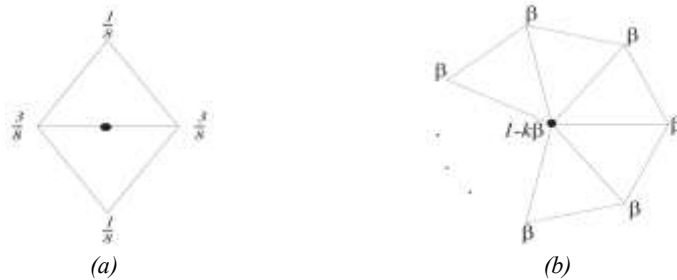
Xét một lưới tam giác M được tạo bởi m điểm dữ liệu, nếu sử dụng lưới này như lưới điều khiển của mặt Bézier tam giác, B-patch hoặc các mảnh của B-spline tam giác thì bậc của các mặt cong tái tạo được xác định như sau:

$$n = \frac{1}{2} (\sqrt{1+8m} - 3) \tag{4}$$

III. LƯỢC ĐỒ TÁI HỢP MẢNH TRÊN LƯỚI TAM GIÁC

Với mục đích thô hóa lưới tam giác ban đầu bằng cách áp dụng lược đồ tái hợp mảnh, từ đó sử dụng lưới thô như lưới điều khiển của mặt cong tham số tam giác cần tái tạo, cho nên trong bài báo này chúng tôi sử dụng lược đồ phân mảnh Loop và đưa ra công thức tái hợp mảnh Loop.

Phân mảnh Loop là một phân mảnh tách mặt xấp xỉ dựa trên Spline tam giác [3], cho phép làm mịn lưới tam giác có hình dạng bất kỳ và sinh ra mặt cong đạt liên tục C^2 [5]. Trong mỗi bước phân mảnh lưới, mỗi tam giác được tách thành bốn tam giác con. Xuất phát từ lưới tam giác khởi tạo M^0 , áp dụng lược đồ phân mảnh Loop liên tiếp, ta thu được lần lượt các lưới M^1, M^2, M^i dần hội tụ về mặt cong trơn của đối tượng. Sau mỗi bước phân mảnh thứ i , các đỉnh của lưới M^i được chia thành hai loại: Các đỉnh mới được chèn thêm vào cạnh, được gọi là điểm cạnh, và các đỉnh cũ được hiệu chỉnh, được gọi là điểm đỉnh. Mặt nạ của các điểm cạnh và điểm đỉnh được cho ở Hình 2[5].



Hình 2. Mặt nạ phân mảnh Loop dùng cho: (a) điểm cạnh và (b) điểm đỉnh

Giả sử vị trí các điểm đỉnh và điểm cạnh trong lưới M^i lần lượt ứng với các trọng số α và β . Để tái hợp mảnh Loop, ta cần xác định vị trí của các điểm trong lưới M^{i-1} , hay nói cách khác, ta cần xác định các trọng số μ và η tương ứng với các trọng số α và β bằng công thức nghịch đảo. Từ công thức xác định các điểm p^i và các lân cận của nó trên lưới M^i của phân mảnh Loop [3], các điểm đỉnh p^{i-1} của lưới M^{i-1} được xác định như sau:

$$p^{i-1} = \mu \cdot p^i + \eta \cdot \sum_{j=1}^k p_j^i \tag{5}$$

trong đó, $\alpha = 1 - k\beta$; $\beta = \frac{1}{k} \left(\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \left(\frac{2\pi}{k} \right) \right)^2 \right)$; $\mu = \frac{5}{8\alpha - 3}$ và $\eta = \frac{\alpha - 1}{n \left(\alpha - \frac{3}{8} \right)}$ (6)

Ở đây, k được gọi là bậc của đỉnh p^i . Trọng số β phụ thuộc vào k và được dùng để điều chỉnh độ mượt của mặt cong phân mảnh. Với một mặt cong tham số tam giác bậc n , sau i bước áp dụng lược đồ tái hợp phân mảnh Loop lên lưới điều khiển, bậc của mặt cong này sẽ giảm còn $n/2^i$.

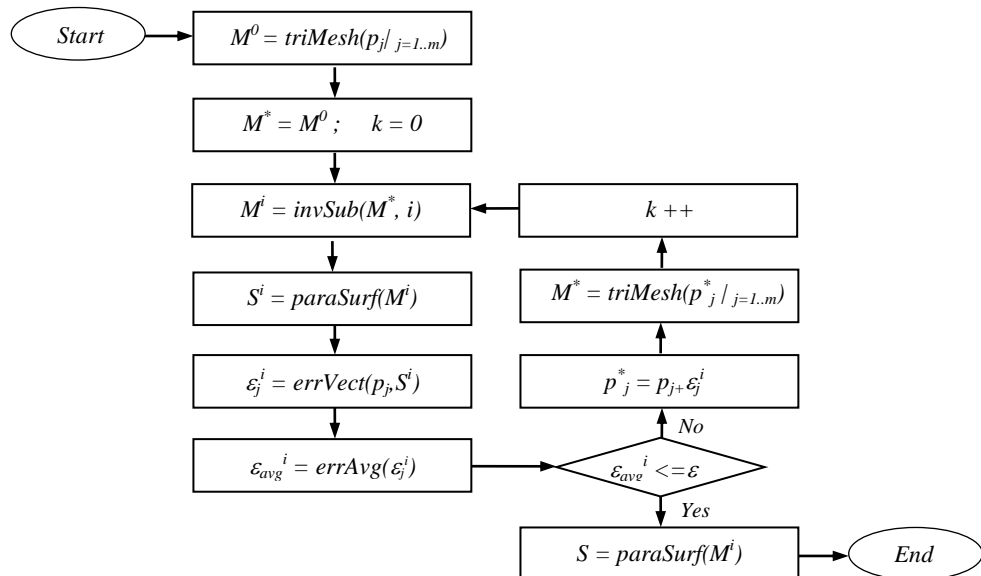
IV. PHƯƠNG PHÁP DỊCH CHUYỂN HÌNH HỌC CỤC BỘ

Trong phần này, chúng tôi đề xuất giải thuật dịch chuyển hình học cục bộ để tái tạo mặt cong tham số từ lưới tam giác. Bằng cách sử dụng lược đồ tái hợp mảnh Loop, lưới tam giác khởi tạo sẽ được thô hóa. Sau đó lưới thô này sẽ được dùng như lưới điều khiển của mặt cong dịch chuyển, nhờ đó mà mặt cong thu được sẽ có bậc thấp hơn so với việc dùng lưới ban đầu như lưới điều khiển của mặt cong. Sau đó, mặt cong này sẽ được dịch chuyển hình học dần hội tụ về các điểm dữ liệu của lưới tam giác ban đầu. Để tối thiểu hóa độ lệch giữa các điểm dữ liệu và mặt cong dịch chuyển, các điểm điều khiển của mặt cong này được điều chỉnh cục bộ trong mỗi bước lặp của giải thuật dịch chuyển hình học. Các đám mây nút cũng được cập nhật lại để tăng độ chính xác cho mặt cong được tái tạo.

Toàn bộ các bước chính của phương pháp đề xuất được liệt kê theo thứ tự như sau:

1. Lưới tam giác ban đầu M^0 , gồm m điểm dữ liệu $p_j |_{j=1..m}$, được cập nhật lại cấu trúc dữ liệu cho phù hợp với cấu trúc phân mảnh Loop.
2. Tạo lưới thô điều khiển M^i bằng cách áp dụng lược đồ tái hợp mảnh lên lưới ban đầu M^0 , trong đó i là số lần tái hợp mảnh.
3. Dùng mặt cong tham số dịch chuyển S^i bằng cách sử dụng lưới M^i như lưới điều khiển của mặt cong. Cập nhật lại đám mây nút trong miền tham số của mặt cong.
4. Ứng với mỗi điểm dữ liệu p_j , xác định các vectơ lỗi ϵ_j^i . Trong đó ϵ_j^i là độ lệch giữa các điểm dữ liệu so với mặt cong dịch chuyển S^i .
5. Dựa trên các vectơ lỗi ϵ_j^i , điều chỉnh lại lưới dịch chuyển cũng như các điểm điều khiển của mặt cong. Nhờ đó mà mặt cong dịch chuyển cũng được điều chỉnh lại cho dần hội tụ đến các điểm dữ liệu của lưới ban đầu.

Trong quá trình dịch chuyển, một chuỗi các lưới dịch chuyển được tạo ra, cập nhật và được thô hóa. Từ đó, một chuỗi các mặt cong tương ứng cũng lần lượt được sinh ra và hội tụ dần về phía lưới ban đầu. Qua mỗi bước dịch chuyển, vectơ lỗi trung bình ϵ_{avg}^i giảm dần. Quá trình dịch chuyển dừng khi vectơ lỗi trung bình bé hơn dung sai ϵ . Sau một số bước dịch chuyển hình học cục bộ, mặt cong tham số tái tạo được nội suy hầu hết các điểm dữ liệu của lưới ban đầu với lỗi trung bình nhỏ nhất. Giải thuật được thể hiện chi tiết thông qua sơ đồ trong Hình 3.



Hình 3. Sơ đồ giải thuật dịch chuyển hình học cục bộ

Các ký hiệu trong sơ đồ có ý nghĩa như sau:

- $M^0 = triMesh(p_j |_{j=1..m})$: Dụng lưới tam giác M^0 từ m các điểm dữ liệu p_j .
- $M^i = invSub(M^*, i)$: Tạo lưới thô M^i từ lưới dịch chuyển M^* thông qua i lần tái hợp mảnh.
- $S^i = paraSurf(M^i)$: Sinh mặt cong tham số tam giác S^i bằng cách sử dụng lưới M^i làm lưới điều khiển.
- $\varepsilon_j^i = errVect(p_j, S^i)$: Xác định các vectơ lỗi ε_j^i ứng với mỗi điểm dữ liệu p_j .
- $\varepsilon_{avg}^i = errAvg(\varepsilon_j^i)$: Tính vectơ lỗi trung bình dựa trên các vectơ lỗi ε_j^i .

Giả sử rằng quá trình dịch chuyển mặt cong thực hiện k lần, khi đó, giá trị k phụ thuộc vào dung sai ε . Với m điểm dữ liệu p_j , giải thuật dịch chuyển hình học cục bộ để tái tạo mặt cong tham số tam giác S sẽ có độ phức tạp $\theta(m \times k(\varepsilon))$

V. KẾT QUẢ THỰC NGHIỆM

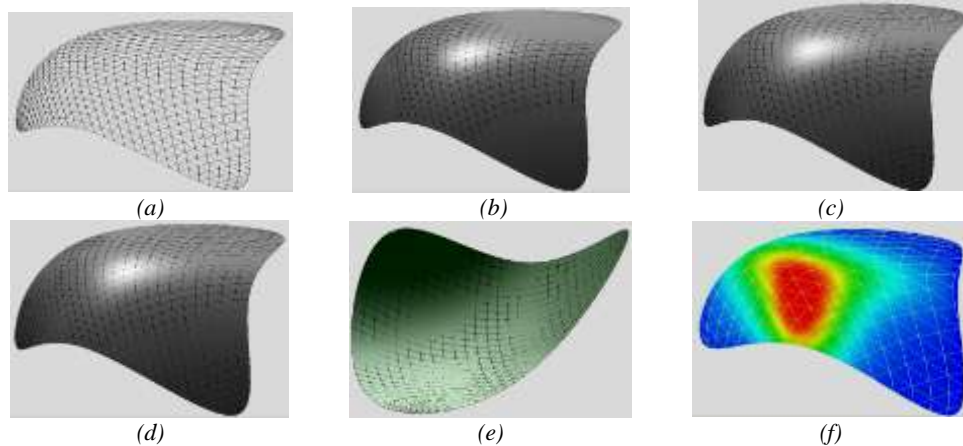
Để có được các kết quả thực nghiệm, chúng tôi đã cài đặt giải thuật đề xuất trên máy tính cá nhân Pentium dual core CPU 2.16GHz với 1.0GB RAM, sử dụng Microsoft VC++ và thư viện đồ họa mở OpenGL. Ứng với các mô hình thực nghiệm dùng để tái tạo các mặt cong trên miền tham số tam giác như Bézier tam giác, B-patch và B-spline tam giác, chúng tôi đều xem xét bậc, độ chính xác, độ cong của mặt cong đạt được và thời gian thực hiện của thuật toán.

Gọi i là số lần tái hợp mảnh Loop; k là số bước lặp khi thực hiện giải thuật dịch chuyển hình học cục bộ; ε_{avg} là độ lệch trung bình tính được tại lần tái hợp mảnh i và bước dịch chuyển k ; N_ε là độ hội tụ của mặt cong ứng với dung sai ε , và N_ε được tính bằng tỉ lệ phần trăm của số điểm dữ liệu đi qua mặt cong đạt được so với tổng các điểm dữ liệu của lưới tam giác ban đầu. Khi đó, các mô hình lưới thực nghiệm, một số kết quả tính toán và các mặt cong tham số tái tạo tương ứng được liệt kê trong Bảng 1.

Bảng 1. Các mô hình thực nghiệm và mặt cong kết quả đạt được tương ứng

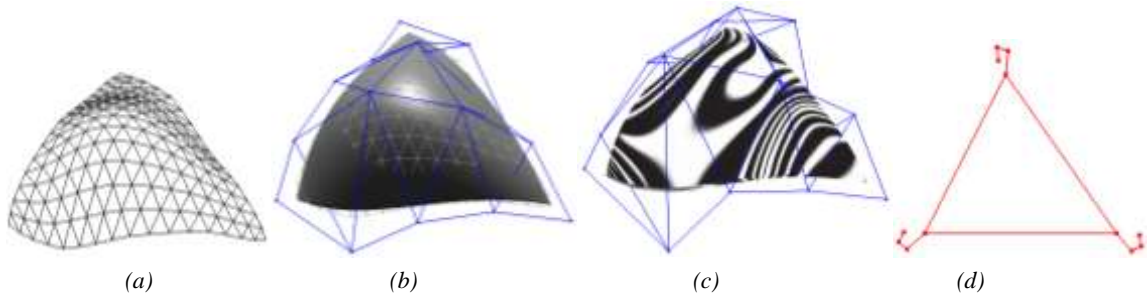
Mô hình	Lưới khởi tạo		Kết quả tính toán					Mặt cong tham số được tái tạo			
	Số điểm	Số mặt	i	k	ε_{avg}	N_ε (%)	Thời gian(s)	Mặt cong	Bậc	Số điểm điều khiển	Số tam giác miền tham số
<i>BézierMesh</i>	561	1024	1	6	0.0009291	99.756	<1	Bézier	16	153	1
<i>BpatchMesh</i>	153	256	2	10	0.004664	94.771	22	B-patch	4	15	1
<i>BsplineMesh</i>	3681	7168	3	9	0.004034	91.979	114	B-spline	2	69	28

Mô hình đầu tiên để tái tạo mặt cong tham số Bézier tam giác là lưới tam giác *BézierMesh* bao gồm 561 điểm và 1024 mặt (Hình 4a). Nếu dùng lưới này như lưới điều khiển của mặt cong dịch chuyển thì mặt cong thu được sẽ có bậc $n=32$. Tuy nhiên, để giảm bậc của mặt cong kết quả, chúng tôi đã áp dụng lược đồ tái hợp mảnh Loop lên lưới này và sử dụng lưới kết quả như lưới điều khiển của mặt cong dịch chuyển, sau $k = 2, 4, 6$ bước dịch chuyển hình học cục bộ, Bézier kết quả nhanh chóng hội tụ về lưới ban đầu (Hình 4b,c,d). Hình 4d và 4e cho thấy mặt cong đạt được đi qua hầu hết các điểm dữ liệu, đó là một Bézier tam giác có bậc $n = 16$ và nhận 153 điểm làm điểm điều khiển. Hình 4f hiển thị Bézier tái tạo được cùng với độ cong Gaussian của mặt cong. Thời gian tái tạo Bézier này khá nhanh, chưa tới 1 giây cho $k = 6$ bước dịch chuyển hình học, với độ lệch trung bình khá nhỏ, $\varepsilon_{avg} = 0.0009291$, và độ hội tụ cao, $N_\varepsilon = 99.756\%$.



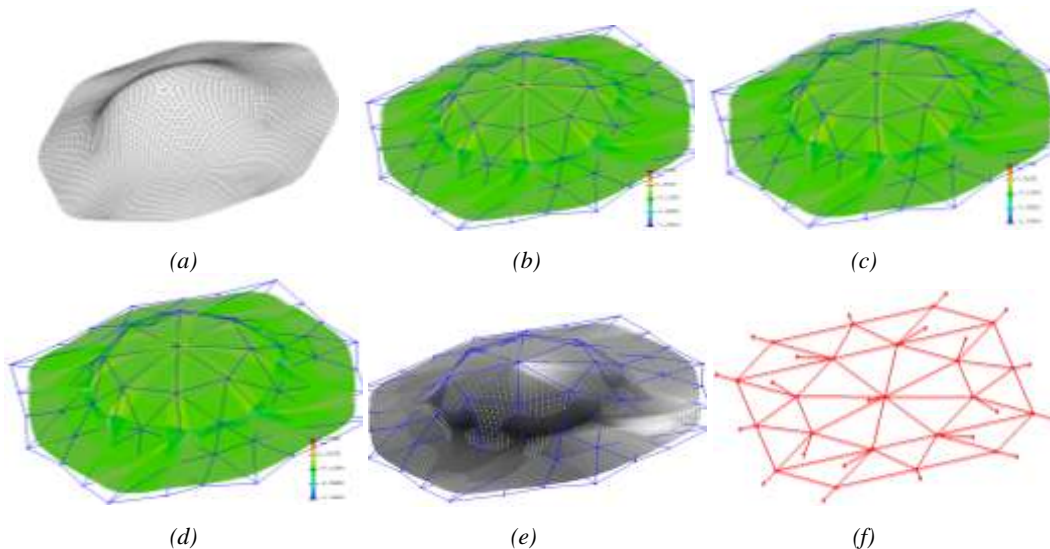
Hình 4. Tái tạo mặt cong Bézier tam giác: (a) Lưới khởi tạo, (b,c,d) mặt cong đạt được sau $k=2,4,6$ bước dịch chuyển, (e) mặt trong của mặt cong (d), và (f) độ cong Gaussian của Bézier kết quả với bậc $n=16$

Mô hình thứ hai *BpatchMesh* được hiển thị trong Hình 5a, thông tin về lưới tam giác này như trong Bảng 1. Sau khi áp dụng $i=2$ lần tái hợp mảnh Loop, chúng tôi thu được lưới thô chỉ còn 15 điểm điều khiển và 16 mặt. Dùng lưới thô kết quả để dựng mặt cong tham số B-patch và dịch chuyển hình học mặt cong này bằng cách điều chỉnh cục bộ lưới dịch chuyển theo các vectơ lỗi. Sau $k=10$ bước dịch chuyển, B-patch thu được là một mặt cong tham số bậc $n=4$ (Hình 5b). Mặt cong này đạt được tại độ lệch trung bình $\varepsilon_{avg} = 0.004664$ và độ hội tụ khá cao, $N_\varepsilon = 94.771\%$.



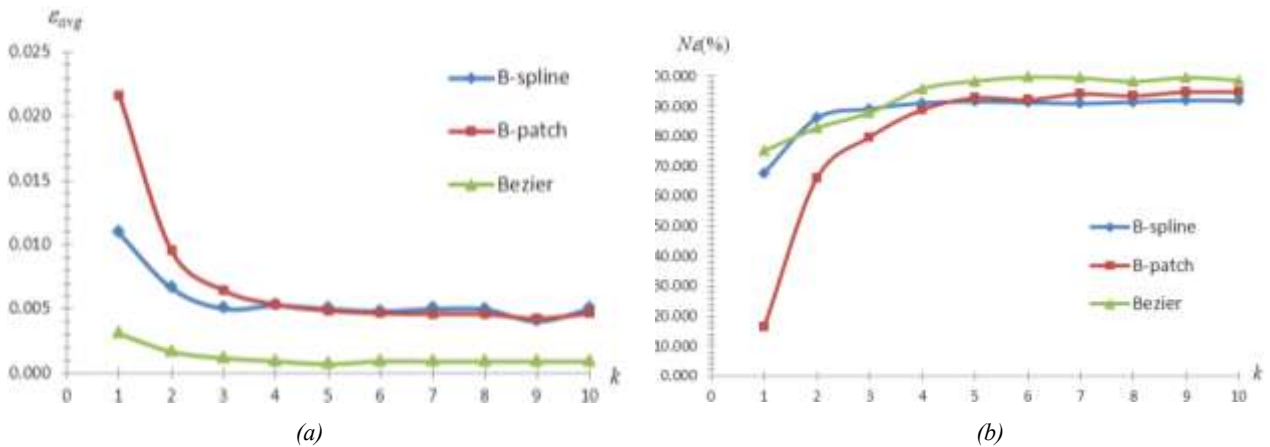
Hình 5. Tái tạo mặt cong B-patch: (a) Lưới khởi tạo, (b) B-patch bậc $n=4$ đạt được sau $k=10$ bước dịch chuyển, (c) mapping zebra của (b), và (d) miền tham số cùng với các đám mây nút của B-patch kết quả

Hình 6a minh họa mô hình thứ ba, lưới tam giác *BsplineMesh*, gồm 3681 điểm và 7168 mặt. Để có được lưới điều khiển của mặt cong dịch chuyển B-spline với bậc thấp, chúng tôi áp dụng $i=3$ lần tái hợp mảnh Loop lên lưới này. Kết quả thu được là một lưới tam giác điều khiển chỉ còn 69 điểm. Từ lưới thô kết quả, chúng tôi dựng mặt cong B-spline bậc $n=2$, với miền tham số là một lưới phẳng gồm 28 tam giác (Hình 6f). Sau $k=3, 6, 9$ bước dịch chuyển hình học cục bộ (Hình 6b, c, d), mặt cong B-spline trên miền tham số tam giác có bậc $n=2$ đạt được với độ lệch trung bình khá nhỏ, $\varepsilon_{avg} = 0.004034$, và độ hội tụ khá cao $N_\varepsilon = 91.979\%$. Mặc dù cần phải xác định rất nhiều Spline đơn hình để tính tọa độ của một điểm trên mặt cong, nhưng thời gian để tái tạo B-spline này không quá hai phút.



Hình 6. Tái tạo mặt cong B-spline tam giác: (a) Lưới khởi tạo, (b,c,d) mặt cong đạt được sau $k=3,6,9$ bước dịch chuyển, (e) lưới điều khiển và B-spline kết quả bậc $n=2$, và (f) miền tham số cùng với các đám mây nút của B-spline kết quả

Cuối cùng, để đánh giá độ chính xác của các mặt cong Bézier tam giác, B-patch và B-spline tam giác được tái tạo so với các mô hình lưới tam giác ban đầu, cũng như tốc độ hội tụ của giải thuật dịch chuyển hình học cục bộ trong các bước lặp k , Hình 7 minh họa sự ảnh hưởng này thông qua độ lệch trung bình ε_{avg} và độ hội tụ N_ε . Hình 7a cho thấy độ lệch trung bình ε_{avg} của cả ba mô hình phụ thuộc mạnh mẽ vào số bước dịch chuyển k , đặc biệt chúng giảm mạnh trong bốn bước đầu tiên. Các độ lệch này tương đối ổn định từ bước thứ năm trở đi và nằm trong khoảng từ 0.004 đến 0.005 (đối với B-patch, B-spline tam giác) và từ 0.0007 đến 0.0009 (đối với Bézier tam giác). Điều này cho thấy các mặt cong tham số đạt được nhanh chóng hội tụ về các điểm dữ liệu chỉ sau vài bước dịch chuyển hình học. Tương tự, các đồ thị trong Hình 7b cho thấy số bước lặp càng tăng thì độ hội tụ N_ε theo bước dịch chuyển k càng cao. Các giá trị N_ε này cũng tăng nhanh trong bốn bước đầu và sau đó dần chạm ngưỡng 92% (đối với B-spline tam giác), 95% (đối với B-patch) và 100% (đối với Bézier tam giác). Sở dĩ việc tái tạo mặt cong Bézier tam giác cho kết quả cao hơn so với hai dạng mặt cong còn lại có thể giải thích được là do miền tham số của mặt cong Bézier chỉ đơn thuần là một tam giác miền. Trong khi đó B-patch và B-spline, bên cạnh miền tham số tam giác còn có các đám mây nút. Cấu hình các đám mây nút này cũng ảnh hưởng đến hình dáng của mặt cong.



Hình 7. Ảnh hưởng của số bước lặp k đối với độ chính xác của mặt cong được tái tạo theo: (a) lỗi trung bình ϵ_{avg} và (b) độ hội tụ $N_\epsilon(\%)$

VI. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, dựa trên giải thuật dịch chuyển hình học cục bộ cùng với lược đồ tái hợp mảnh, chúng tôi đã đề xuất một giải pháp mới cho phép tái tạo mặt cong trên miền tham số tam giác có bậc thấp. Phương pháp đề xuất có một số ưu điểm sau:

- Tránh được các nhược điểm của các phương pháp truyền thống là phải giải các hệ phương trình tuyến tính và giải quyết các vấn đề bình phương tối thiểu, mặt cong kết quả vẫn đi qua hầu hết các điểm dữ liệu của lưới tam giác ban đầu.
- Tận dụng ưu điểm đơn giản, mềm dẻo và trực quan của các phương pháp xấp xỉ lặp lại gần đây. Hơn nữa, bằng cách sử dụng lược đồ tái hợp mảnh nên mặt cong được tái tạo có bậc thấp hơn nhiều so với việc sử dụng lưới ban đầu như lưới điều kiện. Mặt khác, bằng cách điều chỉnh cục bộ lưới dịch chuyển cũng như các điểm điều khiển nên mặt cong dịch chuyển nhanh chóng hội tụ đến lưới ban đầu chỉ sau vài bước dịch chuyển.
- Phương pháp áp dụng cho lưới tam giác, do đó tận dụng được các ưu điểm của lưới tam giác hay lưới không cấu trúc. Hơn nữa, mặt cong tái tạo được là các mặt cong trên miền tham số tam giác, nên cho phép biểu diễn bề mặt của đối tượng thực một cách mềm dẻo và điều chỉnh cục bộ hình dáng mặt cong thông qua các điểm điều khiển. Đặc biệt, B-spline tam giác bậc n đạt liên tục C^{n-1} tái tạo được, cho phép biểu diễn bề mặt trơn mềm toàn cục với hình dáng bất kỳ mà không cần phải thực hiện ghép nối.

Hầu hết các mặt cong thường dùng trong thiết kế hình học là các mặt cong tham số bậc thấp, do đó kết quả này có ý nghĩa thực tiễn và hứa hẹn trong nhiều lĩnh vực như: hỗ trợ thiết kế, tái tạo ngược và thực tại ảo. Ngoài ra, còn có thể ứng dụng trong nén dữ liệu 3D, trao đổi dữ liệu trên môi trường mạng không giấy băng thông hẹp và trên các thiết bị di động.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] C. Deng, H. Lin, "Progressive and iterative approximation for least squares B-spline curve and surface fitting", *Computer-Aided Design*, vol.47, pp.32–44, 2014.
- [2] C. Deng, W. Ma, "Weighted progressive interpolation of Loop subdivision surfaces", *Computer-Aided Design*, vol.44, pp.424–31, 2012.
- [3] C. Loop, "Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles", M. S. Mathematics thesis, 1987.
- [4] Christopher K, Ingram, "A Geometric B-Spline Over the Triangular Domain", M. S. Mathematics thesis, 2003.
- [5] Denis Zorin, Peter Schroder, "Subdivision for Modeling and Animation", *SIGGRAPH Course Notes*, 2000.
- [6] Dian Pratiwi, "The Implementation of Univariate and Bivariate B-Spline Interpolation Method in Continuous", *IJCSI International Journal of Computer Science Issues*, vol.10, Issue 2, No 2, March 2013.
- [7] F. Cheng, F. Fan, S. Lai, C. Huang, J. Wang, J. Yong, "Loop subdivision surface based progressive interpolation", *Journal of Computer Science and Technology*, vol.24, pp.39–46, 2009.
- [8] G. Farin, "Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide", 5th edn, Morgan Kaufmann, San Mateo, 2002.
- [9] G. Greiner, "Geometric modeling", Lecture in Winter Term, 2010.
- [10] Jie Chen, Guo-Jin Wang, "Progressive iterative approximation for triangular Bézier surfaces", *Computer-Aided Design*, vol.43, pp.889–895, 2011.
- [11] L. Lu, "Weighted progressive iteration approximation and convergence analysis", *Computer Aided Geometric Design*, 27(2), pp.129–37, 2010.

- [12] M. Eck, H. Hoppe, “Automatic reconstruction of B-spline surfaces of arbitrary topological type”, In Proceedings of SIGGRAPH96, ACM Press, pp.325–334, 1996.
- [13] M. Botsch, M. Pauly, C. Rossl, S. Bischoff and L. Kobbelt, “Geometric Modeling Based on Triangle Meshes”, EuroGraphics, 2006.
- [14] M. Halstead, M. Kass, T. Derose, “Efficient, fair interpolation using Catmull-Clark surfaces”, In Proceedings of ACM SIGGRAPH 93, pp. 35–44, 1993.
- [15] Neamtu M, “Bivariate simplex B-splines: a new paradigm”, In Proceedings of the 17th spring conference on computer graphics, pp.71–78, 2001.
- [16] Seidel HP, “Symmetric recursive algorithms for surfaces: b-patches and the de Boor algorithm for polynomials over triangles”, *Constructive Approximation*, 7, 257–279, 1991.
- [17] T. Maekawa, Y. Matsumoto, K. Namiki, “Interpolation by geometric algorithm”, *Computer-Aided Design*, vol.39, pp.313–323, 2007.
- [18] W. Dahmen, C. A. Micchelli, and H. P. Seidel, “Blossoming begets B-spline bases built better by B-patches”, *Mathematics of Computation*, 59(199), pp 97-115, 1992.
- [19] Y. Kineri, M. Wang, H. Lin, T. Maekawa, “B-spline surface fitting by iterative geometric interpolation/ approximation algorithms”, *Computer-Aided Design*, vol.44(7), pp.697–708, 2012.
- [20] Y. Nishiyama, M. Morioka, T. Maekawa, “Loop subdivision surface fitting by geometric algorithms”, Poster proceedings of pacific graphics, 2008.
- [21] Y. Xiong, G. Li, A. Mao, “Convergence analysis for B-spline geometric interpolation”, *Computers & Graphics*, vol.36, pp.884–891, 2012.
- [22] Yu Zhao, Hongwei Lin, “The PIA property of low degree non-uniform triangular B-B patches”, In Proceedings of the 12th International Conference on CAD and CG, pp.239-243, 2011.

MODELING LOW DEGREE PARAMETRIC SURFACES FROM TRIANGULAR MESHES BASED ON LOCAL GEOMETRIC FITTING METHOD

Nga Le Thi Thu, Khoi Nguyen Tan, Thuy Nguyen Thanh

ABSTRACT— *Reconstruction of parametric surface from triangular mesh, especially for the surfaces with low degree, has practical significance and is promising in areas such as reverse engineering, virtual reality and CAGD. This paper introduces a novel approach to reconstruct low degree parametric surfaces over the triangular domain, particularly triangular Bezier, B-patch, triangular B-spline, based on inverse subdivision scheme and local geometric fitting method. By using a simplified initial triangular mesh as a control polyhedron of the parametric surface and adjusting the control points iteratively, the obtained surface crosses through most data points of the given mesh without solving any linear system. All control points of the fitting surface, as well as knotclouds of its parametric domain, are iteratively adjusted locally to increase the accuracy of the reconstructed surface. The experimental results show that proposed method is simple, flexible and can be successfully applied to triangular meshes with arbitrary topology.*

Keywords — *Parametric surface, triangular mesh, geometric fitting, inverse subdivision, surface reconstruction.*