Kỷ yếu Hội nghị Khoa học Quốc gia lần thứ IX "Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng Công nghệ thông tin (FAIR'9)"; Cần Thơ, ngày 4-5/8/2016
DOI: 10.15625/vap.2016.00088

THIẾT KẾ HỆ HỖ TRỢ GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ VÉCTƠ DỰA TRÊN MÔ HÌNH TRI THỨC TOÁN TỬ

Nguyễn Đình Hiển, Phạm Thi Vương, Đỗ Văn Nhơn

Đại học Công nghệ thông tin, ĐHQG – HCM

hiennd@uit.edu.vn, vuongpt@uit.edu.vn, nhondv@uit.edu.vn

TÓM TẮT*— Xây dựng các hệ thống thông minh ứng dụng trong giáo dục về Toán học và Khoa học công nghệ là một trong những thách thức lớn của biểu diễn tri thức hiện nay. Các hệ thống này phải thể hiện sự tư duy của con người trong quá trình giải quyết các vấn đề cũng như tương tác, hỗ trợ đối với người học. Trong tri thức toán học, kiến thức Đại số véctơ ở chương trình lớp 10 là một trong những tri thức khó đối với học sinh cấp Trung học phổ thông. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ cải tiến mô hình tri thức toán tử, Ops-model, về mặt cấu trúc các khái niệm trong mô hình,và phân loại các luật của miền tri thức gồm các luật dẫn và các luật phương trình, từ đó thuật giải giải quyết các bài toán trên mô hình cũng được nghiên cứu cải tiến, nâng cao hiệu quả bằng cách áp dụng các luật heuristic, do đó quá trình suy diễn tìm lời giải cũng mô phỏng được quá trình tư duy của con người trong việc giải toán. Mô hình Ops-model cải tiến này được ứng dụng để xây dựng cơ sở tri thức cho miền kiến thức Đại số véctơ và xây dựng một hệ thống hỗ trợ giải tự động một số dạng toán trong miền tri thức này. Lời giải của chương trình cho các bài toán tương tự như cách giải của người, rõ ràng, từng bước.*

Từ khóa*— Tri thức toán tử; hệ giải bài toán thông minh; biểu diễn tri thức; suy diễn tự động.*

I. GIỚI THIỆU

Biểu diễn tri thức có một vai trò quan trọng trong việc thiết kế các hệ cơ sở tri thức và động cơ suy diễn trong các hệ thống thông minh. Hiện nay, có nhiều phương pháp biểu diễn đã được nghiên cứu và ứng dụng trong các miền tri thức khác nhau như: logic, frame-based [1], mạng ngữ nghĩa, đồ thị khái niệm [2] và ontology [3]. Tuy nhiên các phương pháp này không đủ và rất khó ứng dụng trong việc xây dựng hệ thống ứng dụng trong thực tế. Một trong những thách thức hiện nay trong khoa học về biểu diễn tri thức chính là việc xây dựng các hệ thống thông minh ứng dụng trong giáo dục về Toán học và Khoa học công nghệ (Science Technology Engineering and Math Education, STEM) [4]. Trong lĩnh vực giáo dục, hệ thống phải có đủ tri thức để có thể hướng dẫn người học trong quá trình học, đặc biệt là trong việc giải quyết các bài toán. Hệ thống có thể giải tự động các dạng bài toán. Người dùng chỉ cần khai báo các giả thiết và kết luận của bài toán theo một dạng ngôn ngữ đặc tả nhất định [9]. Giả thiết gồm các đối tượng của bài toán và các quan hệ giữa các đối tượng hoặc giữa các thuộc tính của đối tượng. Giả thiết cũng có thể là cho biết giá trị của các đối tượng hoặc thuộc tính đối tượng cũng như các biểu thức giữa chúng. Mục tiêu bài toán chính là việc xác định một thuộc tính, một đối tượng hay một quan hệ giữa các đối tượng. Sau khi đặc tả bài toán, người dùng có thể yêu cầu chương trình giải các bài toán đó hoặc đưa ra những hướng dẫn để giúp người dùng có thể giải quyết bài toán đó.

Hiện nay, đã có nhiều ứng dụng trong lĩnh vực này, tuy nhiên chúng đều không đáp ứng được yêu cầu cho một hệ thống hỗ trợ học tập:

Các hệ thống chứng minh định lý tự động như [5] có thể chứng minh các định lý hình học, tuy nhiên các phương pháp chứng minh này thường sử dụng bằng các phương pháp đại số, cơ sở Grobner, phương pháp Wu. Do đó, các hệ thống này rất khó để cho người học có thể hiểu được lời giải của các chứng minh đó. Bên cạnh đó, một số chương trình có thể giải các bài toán hình học với lời giải có thể đọc được bởi con người (readable proof), chẳng hạn như [6]. Tuy nhiên các lời giải này lại không tự nhiên vì chúng sử dụng các phương pháp như diện tích, góc đầy (full angle), do đó người học không thể ứng dụng trong việc học tập.

Bên cạnh đó, các hệ thống website hỗ trợ giải toán như: Mathway [13], symbolab [14] có khả năng giải quyết các bài toán do người dùng nhập vào với lời giải từng bước, tự nhiên. Tuy nhiên tri thức trong các hệ thống này chủ yếu được đặc tả theo dạng frame, do đó hệ thống chỉ có thể giải được các bài toán đơn giản, không giải được các bài toán đòi hỏi phải vận dụng các kiến thức chuyên sâu của miền tri thức.

Đối với các hệ thống hỗ trợ giải bài tập thông minh hiện nay, bên cạnh việc hướng tới có thể đưa ra các lời giải cho các bài toán một cách tự nhiên, tương tự như cách giải của con người, hệ thống cũng có thể kiểm tra tính chính xác của lời giải do người dùng nhập vào. Đồng thờ hệ thống có thể tương tác với người dùng thông qua việc hướng dẫn giải các bài toán một cách tự động.

Trong thực tế, một dạng tri thức khá phổ biến của con người, đặc biệt là trong các miền tri thức đòi hỏi việc tính toán để suy luận giải quyết các vấn đề, là các tri thức về toán tử. Mô hình này có nền tảng là các khái niệm, toán tử giữa các đối tượng trong tri thức và các luật. Một mô hình biểu diễn tri thức phải đáp ứng được các yêu cầu sau:

- **Tính hình thức:** Các thành phần của mô hình phải được xây dựng trên nền tảng cơ sở lý thuyết chặt chẽ. Đồng thời phải xác lập được (mô hình hóa được) những bài toán, những vấn đề trên thực tế. Bên cạnh đó, có thể đưa ra cơ sở lý thuyết cho các thuật giải để giải quyết các vấn đề này. Thuật giải giải quyết các vấn đề phải được nghiên cứu về tính dừng, tính đúng đắn cũng như đánh giá độ phức tạp của chúng

- **Tính phổ biến:** Mô hình có thể ứng dụng trực tiếp hoặc chỉ cần một số cải tiến nhỏ cho việc đặc tả nhiều miền tri thức thực tế. Hơn nữa, khi áp dụng vào thực tế, cơ sở tri thức được đặc tả có thể cho người dùng hiểu được quá trình suy diễn của tri thức, tương tự như cách con người suy diễn giải quyết vấn đề.

Đối với các kết quả trong [7], Y. Wang đã xây dựng các khái niệm của tri thức bằng cách sử dụng cấu trúc đại số để biểu diễn các thành phần của một khái niệm và những quan hệ trên nó. Tác giả cũng đã đề cập đến một số phép toán giữa các khái niệm trong miền tri thức, tuy nhiên trong mô hình, tác giả lại không đề cập đến các luật suy diễn của tri thức.

Tác giả C. Yang và W. Cai cũng đã xây dựng cơ sở lý thuyết toán học trong việc biểu diễn tri thức dựa trên hệ luật mở rộng, các luật này được nghiên cứu trong việc giải quyết bài toán về kiểm tra sự mâu thuẫn trong các mô hình hình thức, trong [8]. Tuy vậy hệ thống hệ luật mở rộng này không hiệu quả trong hệ thống lớn, cũng như trong việc biểu diễn các tri thức có dạng mô tả, hoặc có cấu trúc.

Trong [10], tác giả đã sử mô hình tri thức toán tử với nền tảng là các khái niệm, các quan hệ, các phép toán giữa các khái niệm và các luật của miền tri thức để xây dựng các hệ thống giải bài toán thông minh trong miền kiến thức Điện một chiều và Đại số véctơ. Tuy nhiên, trong mô hình này tác giả chưa đề cập đến cấu trúc của các khái niệm cũng như giải quyết các vấn đề liên quan đến các luật dạng phương trình, đồng thời ứng dụng chỉ giải quyết được các bài tập đơn giản trong các miền tri thức.

Trong bài báo này, trên cơ sở mô hình tri thức toán tử, Ops-model [10], chúng tôi trình bày một cải tiến của mô hình trên cơ sở phân tập luật thành các dạng luật dẫn và luật phương trình, đồng thời xây dựng cấu trúc các khái niệm trong mô hình tri thức toán tử. Bên cạnh đó, các quy tắc suy luận trên mô hình cũng được nghiên cứu, và định nghĩa lời giải của một bài toán. Về thiết kế bộ suy diễn, thuật giải giải quyết các vấn đề đề sẽ được kết hợp với các quy tắc heuristic giúp cho hệ thống có thể nâng cao hiệu quả của quá trình suy diễn. Từ đó, chúng tôi vận dụng mô hình cải tiến này để thiết kế hệ hỗ trợ giải tự động các bài tập trong kiến thức về Đại số véctơ. Chương trình có thể giải được một số các bài tập nâng cao trong chương trình toán THPT, đồng thời chương trình cũng cho một lời giải tự nhiên, tương tự như cách giải của con người.

II. THIẾT KẾ CƠ SỞ TRI THỨC ĐẠI SỐ VÉCTƠ

A. *Mô hình tri thức toán tử*

Mô hình biểu diễn tri thức toán tử, gọi là *Ops-model*, là một bộ gồm 4 thành phần [10]:

K = (C, R, Ops, Rules)

Trong đó: **C** là tập các khái niệm của miền tri thức. **R** là tập các quan hệ giữa các khái niệm trong tri thức, mỗi quan hệ này là một quan hệ hai ngôi giữa hai khái niệm trong tập C. **Ops** là tập các toán tử. Trong bài báo này chúng tôi chỉ xét toán tử hai ngôi trên các khái niệm trong tập C, cùng với việc khảo sát các tính chất của toán tử: đối xứng, kết hợp, phần tử trung hòa. **Rules** là tập các luật, các luật trong mô hình này được phân thành hai loại: luật dưới dạng luật dẫn và luật dưới dạng phương trình.

Trong mục này, việc phân lớp các khái niệm và đặc tả cấu trúc các đối tượng trong C được nghiên cứu, đồng thời tập luật Rules cũng được nghiên cứu về các loại luật và đặc tả các sự kiện tương ứng.

1. *C – Tập các khái niệm*

Mỗi khái niệm $c \in C$ có một tập thể hiện, gọi là I_c; mỗi $x \in I_c$, là một đối tượng của khái niệm c. Tập được phân lớp như sau:

- Khái niệm cơ bản: gọi là $C_{(0)}$, gồm tập các số thực $\Re$ và các khái niệm được xác định bởi một tập các phần tử là tập thể hiện của khái niệm.
- Khái niệm cấp 1: gọi là $C_{(1)}$, các khái niệm thuộc lớp này là một lớp các đối tượng có cấu trúc:

(*Attrs, EqObj, RulesObj*)

1/ Tập các thuộc tính Attrs: $\varnothing \neq Attrs \subset \{ x_i, i=1..n \mid x_i \in I_{ci}, ci \in C_{(0)}\}$

2/ Tập các luật dạng phương trình: $EqObj \subset \{f \mid f \in Eq_{Attrs}, var(f) \subseteq Attrs\}$, với var(expr) là tập hợp các biến trong biểu thức expr.

với $Eq_{Attrs} = \{g = h \mid$ g, h là các biểu thức, $var(g) \subseteq Attrs, var(h) \subseteq Attrs \}$, Eq_{Attrs} là tập các phương trình liên quan đến các biến trong Attrs.

3/ Tập các luật dẫn: $RulesObj \subset \{u \rightarrow v \mid var(u) \subseteq Attrs, var(v) \subseteq Attrs, u \cap v = \varnothing\}$

- Khái niệm cấp 2: gọi là $C_{(2)}$, các khái niệm thuộc lớp này là một lớp các đối tượng có cấu trúc:

(*Attrs, EqObj, RulesObj*)

1/ $\varnothing \neq Attrs \subset \{ x_i, i=1..n \mid x_i \in I_{ci}, ci \in C_{(0)} \cup C_{(1)}\}$

2/ $\exists x_o \in Attrs, \exists c_{xo} \in C_{(1)}, x_o \in I_{cxo}$

3/ $EqObj \subset \{f \mid f \in Eq_{Attrs}, var(f) \subseteq Attrs\}$

4/ $RulesObj \subset \{u \rightarrow v \mid var(u) \subseteq Attrs, var(v) \subseteq Attrs, u \cap v = \varnothing\}$

Bên cạnh cấu trúc, một đối tượng trong tri thức còn có các hành vi sau để giải quyết các vấn đề nội tại của đối tượng: 1/ Xác định bao đóng của các sự kiện trong đối tượng. 2/ Cho biết lời giải của việc xác định thuộc tính của đối tượng từ các thuộc tính đã biết. 3/ Tính toán trên đối tượng.

Ngoài ra, khi các khái niệm được phân cấp thì các quan hệ và các phép toán giữa các khái niệm cũng sẽ được phân cấp một cách tương ứng.

2. Rules – Tập các luật

Rules là tập hợp các luật suy diễn của miền tri thức, các luật này được phân thành các loại luật sau: luận dẫn và luật có dạng phương trình.

Rules = $Rule_{deduce} \cup Rule_{equation}$

$Rule_{deduce}$	$Rule_{equation}$
r là một luật dẫn, có dạng: $u(r) \rightarrow v(r)$ với u(r), v(r) là các tập sự kiện	r là một luật dạng phương trình, có dạng: $g(o_1, o_2, \ldots, o_k) = h(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ với o_i, x_i là các đối tượng và g, h là các biểu thức giữa các đối tượng.

Trong đó, các sự kiện được phân loại như sau:

Loại	Ý nghĩa	Đặc tả	Điều kiện
1	Cho biết thông tin về loại của đối tượng	x:c	$x \in \Sigma^*, c \in C$
2	Cho biết sự xác định của một đối tượng hoặc thuộc tính của một đối tượng.	X	$x \in I_c$, $c \in C$
3	Sự xác định của một thuộc tính hay một đối tượng thông qua một giá trị hay một biểu thức hằng	x = <const>	$x \in I_c$, $c \in C$ <const>: constant
4	Sự kiện về sự bằng nhau giữa một đối tượng hay một thuộc tính với một đối tượng hay một thuộc tính khác.	x = y	$x, y \in I_c$, $c \in C$
5	Sự kiện về sự bằng nhau giữa các biểu thức của đối tượng.	<expr1> = <expr2>	<expr1>: biểu thức <expr2>: biểu thức
6	Sự kiện về quan hệ giữa các đối tượng.	x Φ y	$\Phi \in R$, $x \in I_{cx}$, $y \in I_{cy}$, $cx \in C$, $cy \in C$

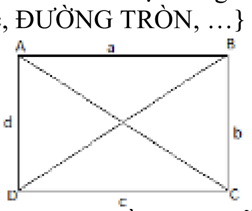
B. Thiết kế cơ sở tri thức Đại số véctơ

Trên cơ sở kiến thức về Đại số véctơ ở cấp THPT trong [11], miền tri thức này được biểu diễn bằng mô hình tri thức toán tử Ops-model cải tiến, gồm 4 thành phần **(C, R, Ops, Rules).** Cơ sở tri thức Đại số véctơ được biểu diễn như trong bảng 1.

Bảng 1. Cơ sở tri thức Đại số Véctơ

Cấp	C	R	Ops	Rules $Rule_{deduce} \cup Rule_{equal}$
$C_{(0)}$	- Tập các số thực: $\Re$ - Các khái niệm cơ bản: + ĐIỂM: khái niệm về điểm, khái niệm này có tập thể hiện $I_{ĐIỂM}$ + ĐƯỜNG: khái niệm về đường thẳng, khái niệm này có tập thể hiện $I_{ĐƯỜNG}$	- Quan hệ giữa các số thực $\Re$: {≤ , =} R_0 = {*thuộc, giao, song song, vuông góc*} + *thuộc* $\subseteq I_{ĐIỂM} \times I_{ĐƯỜNG}$: quan hệ giữa một điểm thuộc một đường thẳng. + *giao* $\subseteq I_{ĐƯỜNG} \times I_{ĐƯỜNG}$: quan hệ cắt nhau giữa hai đường thẳng. * Quan hệ *"giao"* có tính chất: đối xứng. + *song song* (//) $\subseteq I_{ĐƯỜNG} \times I_{ĐƯỜNG}$: quan hệ song song giữa hai đường thẳng * Quan hệ *"song song"* có tính chất: đối xứng, bắc cầu + *vuông góc* (⊥) $\subseteq I_{ĐƯỜNG} \times I_{ĐƯỜNG}$: quan hệ vuông góc giữa hai đường thẳng * Quan hệ *"vuông góc"* có tính chất: đối xứng.	- Các phép toán trên trường số thực $\Re$: {+, -, *, /}	• Luật dẫn: **Rul 1:** {AB: Đoạn , M: Điểm, M trung điểm AB } $\rightarrow \{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}\}$ **Rul 2:** {u, v: véctơ, u ⊥ v} → {u.v = 0} **Rul 3:** {a, b, c: véctơ, c = a o b} → {c ⊥ a, c ⊥ b} **Rul 4:** {ABC: tam giác, G: điểm, G trọng tâm ABC} $\rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ **Rul 5:** {ABC: tam giác,
$C_{(1)}$	**(Attrs, EqObj, RulObj)** $C_{(1)}$ = {ĐOẠN, VÉCTƠ, GÓC}	R_1 = {*thuộc, trung điểm, phân giác, giao, song song, vuông góc,…*}	O1 = {+, *, . , o} + : Véctơ × Véctơ → Véctơ	

	Khái niệm VÉCTƠ có cấu trúc: *Attrs* = {_A, _B, module}, với: _A, _B: ĐIỂM module: $\Re$; *EqObj* = {Module = Đoạn(A,B)} *RulObj* = { }	+ *thuộc* $\subseteq$ $I_{ĐIỂM} \times I_{ĐOẠN}$: quan hệ giữa một điểm thuộc một đoạn thẳng. + *trung điểm* $\subseteq$ $I_{ĐIỂM} \times I_{ĐOẠN}$: quan hệ giữa một điểm là trung điểm một đoạn thẳng. + *phân giác* $\subseteq$ $I_{ĐOẠN} \times I_{GÓC}$: quan hệ giữ một đoạn thẳng là đường phân giác của một góc. + *giao* $\subseteq$ $I_{ĐOẠN} \times I_c$, với c là khái niệm ĐOẠN, ĐƯỜNG: quan hệ cắt nhau giữa một đoạn thẳng với một đoạn thẳng hay đường thẳng. * Quan hệ *"giao"* có tính chất: đối xứng. + *song song* (//) $\subseteq$ $I_{ĐOẠN} \times I_c$, với c là khái niệm ĐOẠN, ĐƯỜNG: quan hệ song song giữa một đoạn thẳng với một đoạn thẳng hay đường thẳng. * Quan hệ *"song song"* có tính chất: đối xứng, bắc cầu + *vuông góc* ($\perp$) $\subseteq$ $I_{ĐOẠN} \times I_c$, với c là khái niệm ĐOẠN, ĐƯỜNG: quan hệ vuông góc giữa một đoạn thẳng với một đoạn thẳng hay đường thẳng. * Quan hệ *"vuông góc"* có tính chất: đối xứng.	Phép toán cộng giữa hai véctơ Phép toán "+" có tính chất: giao hoán, kết hợp, có phần tử nghịch đảo. $*$: $\Re \times$ Véctơ $\rightarrow$Véctơ Phép toán nhân giữa một số thực và một véctơ . : Véctơ $\times$ Véctơ $\rightarrow \Re$ Tích vô hướng giữa hai véctơ Phép toán "." có tính chất: giao hoán. o : Véctơ $\times$ Véctơ $\rightarrow\Re$ Tích có hướng giữa hai véctơ. Phép toán "o" có tính chất: phản giao hoán.	M: Điểm, N: Điểm, M trung điểm AB, N trung điểm AC} $\rightarrow \left\{ \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right\}$ • Luật dạng phương trình: **Rul 6:** A,B: Điểm, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ **Rul 7:** A,B,C: Điểm, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ **Rul 8:** u: véctơ, u^2 = u.u = $(u.module)^2$ **Rul 9:** u, v: véctơ, u . v = u.module*v.module* cos(u,v) **Rul 10:** u, v: véctơ, u o v = u.module*v.module* sin(u,v)

$C_{(2)}$	**(Attrs, EqObj, RulObj)**
	
	$C_{(2)}$ = {TAM GIÁC và các loại tam giác khác, TỨ GIÁC và các loại tứ giác khác, ĐƯỜNG TRÒN, …}
	
	
	Khái niệm HÌNH CHỮ NHẬT $\in C_{(2)}$ có cấu trúc:
	Attrs = {A,B, C,D, a, b, c, d, S, p,..}
	A, B, C, D: ĐIỂM
	a, b, c, d: ĐOẠN
	S, p: $\Re$
	EqObj = {
	Goc(A)+ Goc(B)+ Goc(C)+ Goc(D) = 360,
	Đoạn(A,C) = Đoạn(B, D),
	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$,
	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
	… }
	
	RulesObj = {
	{ a = b} $\rightarrow$ {ABCD: SQUARE} }
		R_2 ={bằng nhau, nội tiếp, tiếp tuyến}
		+ *bằng nhau* (=) $\subseteq$ $I_{TRIANGLE} \times I_{TRIANGLE}$: quan hệ bằng nhau giữa hai tam giác.
		* Quan hệ "bằng nhau" có tính chất: phản xạ, đối xứng, bắc cầu.
		+ *nội tiếp* $\subseteq$ $I_{TỨ\ GIÁC} \times I_{ĐƯỜNG\ TRÒN}$: quan hệ về một tứ giác nội tiếp một đường tròn.
		+ *tiếp tuyến* $\subseteq$ $I_{ĐOẠN} \times I_{ĐƯỜNG\ TRÒN}$: quan hệ về một đoạn thẳng là tiếp tuyến một đường tròn.
				R11:
				u, v: véctơ,
				u o v = - v o u
				(o là tích có hướng)

III. THIẾT KẾ BỘ SUY DIỄN CHO HỆ THỐNG

A. Bài toán trên đối tượng

Cho một đối tượng Obj = (Attrs, EqObj, RulObj) thuộc một khái niệm trong mô hình tri thức toán tử Ops-model, đối tượng này được trang bị khả năng giải quyết các vấn đề sau:

Bài toán 1: Xác định bao đóng của tập sự kiện: Cho một tập các sự kiện F, xác định tập hợp lớn nhất các sự kiện có thể suy luận từ đối tượng Obj.

Bài toán 2: Cho biết lời giải của bài toán có dạng F → G, với F là một tập sự kiện và G là sự kiện mục tiêu, var(G) ⊂ Obj.Attrs.

Định nghĩa 3.1: *Quy tắc suy luận*

Một quy tắc suy luận trong Ops-model xác định các sự kiện mới từ các sự kiện đã cho. Một quy tắc suy luận được phân loại như sau:

Bảng 2. Phân loại các quy tắc suy luận

Dạng	Ý nghĩa	Ví dụ
Loại 1: K3 → K2	Xác định một sự kiện loại 2 từ sự kiện loại 3	AB.len = 5 → AB
Loại 2: K3 thay vào K4 → K3	Xác định một sự kiện mới loại 3 bằng cách thay sự kiện khác loại 3 vào sự kiện loại 4.	AB.len = 5, AB.len = CD.len → CD.len = 5
Loại 3: K4 → K4	Xác định một sự kiện mới loại 4 từ các sự kiện loại 4	AB.len = CD.len, AB.len = MN.len → CD.len = MN.len
Loại 4: K3 → K4	Từ các sự kiện loại 3 xác định một sự kiện mới loại 4	AB.len = 5, CD.len = 5 → AB.len = CD.len
Loại 5: K3 thay vào K5 → K5	Xác định một sự kiện mới loại 5 bằng cách thay sự kiện loại 3 vào một sự kiện loại 5.	AB + BC = AC, AC = 5 → AB + BC = 5
Loại 6: K3 thay vào K5 → K3	Xác định một sự kiện mới loại 3 bằng cách thay các sự kiện khác loại 3 vào sự kiện loại 5.	Góc(A) + Góc(B) + Góc(C) = 180 Góc A = 90, Góc(B) = 60 → Góc(C) = 30
Loại 7: K4 thay vào K5 → K5	Xác định một sự kiện mới loại 5 bằng cách thay sự kiện loại 4 vào sự kiện loại 5.	AC = AB + BC, AB = BC → AC = 2.BC
Loại 8: Áp dụng luật	Xác định sự kiện mới bằng cách áp dụng các luật của tri thức.	

Định nghĩa 3.2: *Bao đóng tập sự kiện*

Cho đối tượng Obj = (Attrs, EqObj, RulObj) thuộc một khái niệm trong mô hình Ops-model. Gọi OBJECTFACTS(*Obj*) là không gian các sự kiện trong Obj, và F ⊂ OBJECTFACTS(Obj) là một tập sự kiện, A ⊂ Obj.Attrs

Bao đóng của tập sự kiện F bởi Obj, Obj.Closure(F), là tập sự kiện lớn nhất có được bằng cách áp dụng các quy tắc suy luận của đối tượng Obj để mở rộng tập sự kiện F.

Thuật giải xác định Obj.Closure(F) đã được trình bày trong [10], vì vậy bài toán 1 được giải quyết. Bên cạnh đó, ta cũng có thể sử dụng thuật giải ấy để giải quyết bài toán 2.

B. Bài toán trên mô hình Ops-model

Mô hình bài toán trên tri thức toán tử là một bộ gồm 3 thành phần: **(O, F) → Goal**, trong đó:

$O = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$: tập các đối tượng thuộc các khái niệm được đặc tả trong C;

$F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$: tập các sự kiện giữa các đối tượng trong O;

$Goal = \{ g_1, g_2, \ldots, g_k \}$: tập các mục tiêu.

Một mục tiêu của bài toán có thể là các loại sau đây:

- Xác định một thuộc tính của đối tượng.
- Xác định một đối tượng.
- Xác định giá trị của biểu thức giữa các đối tượng .

Định nghĩa 3.3: *Lời giải của bài toán*

Cho miền tri thức K = (C, R, Ops, Rules) và bài toán P = (O, F) → G trên K.

a/ Giả sử $D = [d_1, d_2, \ldots, d_r]$ là danh sách các quy tắc suy luận. Xác định: $F_0 = F$, $F_1 = d_1(F_0)$, $F_2 = d_2(F_1)$, …. $F_s = d_s(F_{s-1})$ và $D(F) = F_s$

Bài toán P gọi là *giải được* khi và chỉ khi tồn tại danh sách D thỏa mãn $G \subseteq D(F)$.

b/ Khi đó: Đặt $s_j = [d_j, F_{j-1}, F_j \backslash F_{j-1}]$

s_j là một *bước giải* của bài toán P và $S = [s_j | j=1..r]$ là *lời giải* của bài toán P.

Thuật giải: *Thuật giải cho bài toán trên mô hình Ops-model*

Cho bài toán P = (O, F) → Goal trên miền tri thức K = (C, R, Ops, Rules), thuật giải sau sẽ xác định lời giải của bài toán P.

Input: O, F, Goal
Output: Lời giải của bài toán

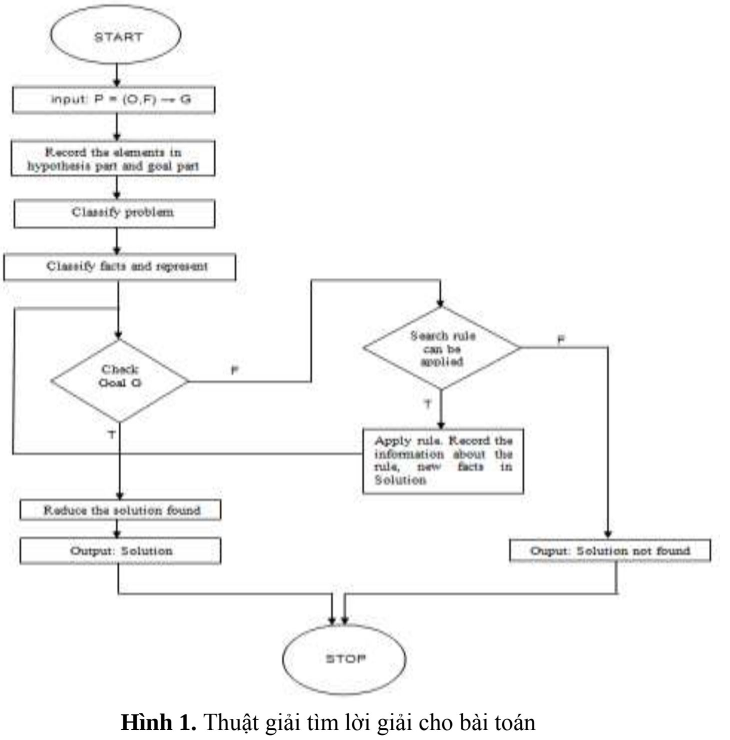
Thuật giải được xây dựng dựa trên chiến lược suy diễn tiến, trong đó các quy tắc suy luận sẽ được áp dụng, đồng thời các đối tượng cũng tham gia vào quá trình suy diễn tìm kiếm lời giải. Thuật giải này cũng tương tự như thuật giải tìm kiếm lời giải trong [10], tuy nhiên quá trình tìm kiếm và sử dụng các luật sẽ được cải tiến để phù hợp với việc phân loại tập luật là luật dạng suy dẫn và dạng phương trình, cùng với việc kết hợp các quy tắc heuristic trong quá trình suy luận. Việc cải tiến đó được thực hiện như sau:

KnownFacts: biến lưu các sự kiện đã được xác định;
Sol: Danh sách các bước giải của bài toán.
Tìm kiếm luật r trong tập Rules có thể áp dụng được

1. Trường hợp: *r là một luật dẫn*
if (r có dạng: u(r) → v(r)) **then**
KnownFacts := KnownFacts ∪ v(r);
s:=[r, u(r), v(r)];
Sol:=[op(Sol), s];
continue;
end if;

2. Trường hợp: *r là một luật dạng phương trình*
if (có thể áp dụng các quy tắc suy luận loại 5, 6 hoặc 7 trên r để sinh ra sự kiện mới) **then**
KnownFacts := KnownFacts ∪ $v_{KnownFacts}(r)$;
s:=[r, $u_s(r)$, v(r)];
Sol:=[op(Sol), s];
end if;

Tìm kiếm các sự kiện loại 5 để ghép thành các phương trình hoặc hệ phương trình để giải quyết bài toán. Gọi các sự kiện loại 5 tìm được là e.
KnownFacts := KnownFacts ∪ {kết quả giải e};
s:=[“Giải phương trình”, e, {kết quả giải e}];
Sol:=[op(Sol), s];



Hình 1. Thuật giải tìm lời giải cho bài toán

C. Các luật heuristic

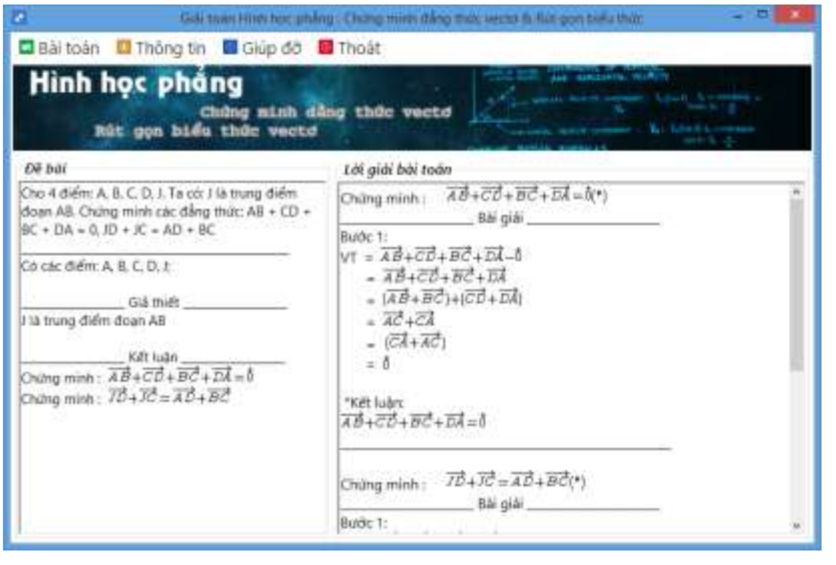
Để quá trình tìm kiếm suy diễn và tính toán được nhanh chóng và hiệu quả hơn, ta có thể sử dụng một số quy tắc sau đây trong việc tìm kiếm và chọn lựa các dạng suy luận có thể áp dụng được:

(H1) Thu hẹp tập luật có thể áp dụng cho bài toán.
(H2) Phương pháp tìm thứ tự ưu tiên của các luật để áp dụng cho bài toán.
(H3) Sử dụng các mẫu bài toán và bài toán mẫu.
(H4) Ưu tiên sử dụng các quy tắc xác định đối tượng và thuộc tính.
(H5) Dùng luật biến đổi đối tượng thành đối tượng ở cấp độ cao hơn trong đồ thị phân cấp nếu có đủ dữ kiện.
(H6) Sử dụng luật để sinh ra các đối tượng mới có quan hệ với các đối tượng đã có, đặc biệt là các mục tiêu.
(H7) Ưu tiên sử dụng luật hay dạng suy luận để phát sinh ra sự kiện liên quan đến các sự kiện mục tiêu.
(H8) Khi có một đối tượng mới được phát sinh trong quá trình sử dụng luật phát sinh đối tượng, ta tiến hành dò tìm luật có thể áp dụng nhằm phát sinh sự kiện mới trước khi thực hiện phát sinh đối tượng tiếp theo.

IV. KẾT QUẢ THỬ NGHIỆM

A. Hệ giải bài toán thông minh kiến thức Đại số véctơ

Chương trình giải toán tự động kiến thức Đại số Véctơ có thể giải các bài toán trong miền tri thức một cách hiệu quả và nhanh chóng. Chương trình rất hữu ích cho các học sinh cấp Trung học phổ thông. Trong bài báo này, sử dụng mô hình Ops-model, cơ sở tri thức Đại số Véctơ trong [11] đã được đặc tả trong mục II.B. Bên cạnh đó, một số bài tập cơ bản và nâng cao của kiến thức cũng đã được thử nghiệm trong chương trình.



Hình 2. Giao diện của chương trình

B. Thử nghiệm lời giải của các bài toán

Chương trình đã được thử nghiệm trên 50 bài tập trong [11], các bài tập này gồm các dạng: Chứng minh một đẳng thức véctơ, rút gọn một biểu thức véctơ, xác định một véctơ thông qua biểu thức giữa các véctơ cho trước.

<u>*Bài toán S1:*</u> Cho một tam giác ABC và G là trọng tâm của tam giác. Lấy điểm M bất kì. Chứng minh rằng:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$$

+ Đặc tả bài toán:

O:= { ABC: tam giác, G: Điểm, M: Điểm}

F:= {G trọng tâm ABC}

G:= {Chứng minh: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$ }

+ Lời giải của chương trình:

$MA^2 + MB^2 + MC^2$

1. $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$ áp dụng luật Rul 8
2. $\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$ áp dụng luật Rul 7
3. $3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2.\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)$
4. $3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2.\overrightarrow{MG}.\vec{0}$ áp dụng luật Rul 4
5. $3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$

Bài toán S2: Cho tam giác ABC, điểm I là trung điểm đoạn BC, J là trung điểm AB. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AI},\ \vec{v} = \overrightarrow{CJ}$.

Biểu diễn $\overrightarrow{AC}$ thành biểu thức giữa $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

+ Đặc tả bài toán:

O:= {ABC: tam giác; I, J: Điểm; u, v: véctơ}

F:= {I trung điểm BC, J trung điểm AB,
$\vec{u} = \overrightarrow{AI},\ \vec{v} = \overrightarrow{CJ}$ }

G:= {Biểu diễn: $\overrightarrow{AC}$ bằng $\vec{u}$ và $\vec{v}$ }

+ Lời giải của chương trình:

1. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$ áp dụng luật Rul 7
2. $\overrightarrow{JC} = -\overrightarrow{CJ}$ áp dụng luật Rul 6
3. {ABC: triangle, I: Điểm, J: Điểm, J trung điểm AB, I trung điểm BC}
$\rightarrow \left\{ \overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right\}$ áp dụng luật Rul 5
4. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CJ}$
5. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{CJ}$
6. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{CJ}$
7. $\overrightarrow{AC} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$

C. Kết quả khảo sát

Chương trình được thử nghiệm với 120 học sinh ở hai trường trung học phổ thông trong Tp.HCM. Khảo sát này tập trung đến bốn yếu tố sau của chương trình:

- *Giao diện thân thiện với người dùng:* người học có thể sử dụng chương trình dễ dàng và hiểu được lời giải của chương trình.
- *Cơ sở tri thức đầy đủ:* Chương trình cung cấp đủ kiến thức cho người học.
- *Khả năng giải quyết vấn đề:* Chương trình có thể giải các bài toán một cách rõ ràng và giải được các dạng toán phổ biến của miền kiến thức.
- *Sự hữu ích:* Chương trình hữu ích với người học.

Kết quả khảo sát như sau:

Bảng 3. Kết quả khảo sát

Yếu tố	Mức độ (Rất tệ → Rất tốt)				
	1	2	3	4	5
Giao diện thân thiện	16%			84%	
Cơ sở tri thức đầy đủ	25%			75%	
Khả năng giải quyết vấn đề	27%			73%	
Sự hữu ích	18%			82%	

V. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã trình bày một sự cải tiến của mô hình tri thức toán tử Ops-model. Sự cải tiến này tập trung vào việc phân tích cấu trúc các khái niệm đồng thời phân loại tập luật thành các luật dạng luật dẫn và luật dạng phương trình. Bên cạnh đó, các quy tắc suy luận trên mô hình cũng được nghiên cứu phân loại và định nghĩa lời giải của bài toán. Từ đó, chúng tôi cũng nghiên cứu các kĩ thuật heuristic áp dụng vào thuật giải trong quá trình tìm kiếm lời giải bài toán, đặc biệt là việc tìm kiếm các phương trình, phép toán có thể áp dụng được. Sự cải tiến này giúp cho hệ thống có thể phù hợp hơn với miền tri thức thực và có thể suy diễn nhanh hơn, hiệu quả hơn và mô phỏng cách giải quyết vấn đề của con người tốt hơn.

Ứng dụng mô hình Ops-model cải tiến, cơ sở tri thức về kiến thức Đại số véctơ đã được xây dựng và thiết kế hệ hỗ trợ giải bài toán thông minh cho miền tri thức này. Chương trình cho lời giải các bài toán tự nhiên, rõ ràng, từng bước. Đồng thời chương trình cũng đã được khảo sát với một số học sinh cấp Trung học phổ thông và nhận được những kết quả khảo sát tích cực.

Trong tương lai, chúng tôi sẽ nghiên cứu sự phối hợp của mô hình tri thức toán tử với mô hình tri thức quan hệ [12] để tạo thành một cấu trúc toán học biểu diễn các miền tri thức gồm cả các quan hệ và tính toán bên trong nó. Kết quả này sẽ là nền tảng cho việc xây dựng các công cụ xử lý cơ sở tri thức trong tương lai.

VI. LỜI CÁM ƠN

Nghiên cứu được tài trợ bởi Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (ĐHQG-HCM) trong khuôn khổ Đề tài mã số C2016-26-06.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Ronald J. Brachman, Hector J. Levesque, Knowledge Representation and Reasoning, Elsvier, 2004.

[2] Frank van Harmelem & Vladimir & Bruce, Handbook of Knowledge Representation, Elsevier, 2008.

[3] John F. Sowa. Knowledge Representation: Logical, Philosophical and Computational Foundations, Brooks/Cole, 2000.

[4] "Final Report on the 2013 NSF Workshop on Research Challenges and Opportunities in Knowledge Representation", Natasha Noy and Deborah McGuinness (Eds). National Science Foundation Workshop Report, 2013.

[5] Zheng Ye, Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, "An Introduction to Java Geometry Expert (Extended Abstract)", Automated Deduction in Geometry (ADG), LNCS, Vol. 6301, pp.189-195, 2008.

[6] N. Matsuda and K. VanLehn, "GRAMY: A geometry theorem prover capable of construction", Journal of Automated Reasoning, vol. 32, no. 1, pp. 3–33, 2004.

[7] Yingxu Wang, "Concept Algebra: A Denotational Mathematics for formal knowledge representation and Cognitive Robot Learning", Journal of Advanced Mathematics and Application, Vol. 4, No. 4, pp. 61-86, American Scientific Publishers, 2015.

[8] Chunyan Yang, Wen Cai, "Knowledge Representations based on Extension Rules", In Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation, Chongqing, China, 2008.

[9] Nhon Van Do, "Chapter 6: Intelligent Problem Solvers in Education: Design Method and Applications", Intelligent Systems, Prof. Vladimir M. Koleshko (Ed.), ISBN: 978-953-51-0054-6, InTech, 2012.

[10] Nguyễn Đình Hiển, Đỗ Văn Nhơn, "Mô hình tri thức toán tử và Ứng dụng xây dựng hệ hỗ trợ giải bài toán thông minh", Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, ISSN: 0866-708X, Tập 52, số 4D, trang 60-76 (2014)

[11] Bộ Giáo dục và Đào tạo, Sách giáo khoa và Sách bài tập Toán lớp 10, NXB Giáo dục, 2012.

[12] Hien D. Nguyen, Vuong T. Pham, Trung T. Le, Dat H. Tran, "A Mathematical Approach for Representation Knowledge about Relations and Its Application", In Proceeding of 2015 IEEE International Conferene on Knowledge and Systems Engineering (KSE 2015), ISBN: 978-1-4673-8013-3, pp. 324-327, Ho Chi Minh, Vietnam, October 2015.

[13] Trang web hỗ trợ giải toán Mathway: www.mathway.com

[14] Trang web hỗ trợ giải toán Symbolab: www.symbolab.com

DESIGN AN INTELLIGENT PROBLEM SOLVER IN VÉCTƠ ALGEBRA BASED ON KNOWLEDGE MODEL ABOUT OPERATORS

Nguyen Dinh Hien, Pham Thi Vuong, Do Van Nhon

ABSTRACT*— Nowadays, designing intelligent systems in education about Mathematics and Science Technology is one of the grand challenges of knowledge representation. These systems have to reprsent the thinking of human when they solve the problem. In high school mathematics, knowledge about Véctơ Algebra in tenth class is a difficult subject with pupils. In this paper, the knowledge model about operators, Ops-model, is improved about the structure of concept, and classification the rules to deductive rules and equation rule Though that, the algorithms for solving problems is also improved by using heuristics rules, so the inference processing of this system simulate the thinking of human to solve them.This improved Ops-model is applied to design the knowledge base of Véctơ Algebra and build an intelligent problems solver for this knowledge domain. The solutions of program is likely the solution of human, naturally and step-by-step.*

Keywords*— Knowledge about operator; intelligent problem solver; knowledge representation; automated reasoning.*