

SỰ HỘI TỤ CỦA PHƯƠNG PHÁP TÁI TẠO MẶT CONG TRÊN MIỀN THAM SỐ TAM GIÁC DỰA TRÊN TÁI HỢP MẠNH VÀ XẤP XỈ HÌNH HỌC

Lê Thị Thu Nga¹, Nguyễn Tấn Khôi², Nguyễn Thanh Thủy³

¹Khoa Công nghệ thông tin, Đại học Quy Nhơn, Việt Nam

²Khoa Công nghệ thông tin, Đại học Bách khoa, Đại học Đà Nẵng, Việt Nam

³Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội, Việt Nam

lenga248@gmail.com, ntkhoi@dut.udn.vn, nguyenthanhthuy@vnu.edu.vn

TÓM TẮT: Mặt cong trên miền tham số tam giác kế thừa các ưu điểm của B-spline một biến và mặt cong tham số tứ giác, kết nối mềm dẻo và phù hợp cho mô phỏng các bề mặt có hình dạng phức tạp. Do đó, chúng đóng vai trò quan trọng và có triển vọng trong việc mô hình hóa hình học cũng như hỗ trợ thiết kế linh hoạt. Bài viết này đề xuất phương pháp tái tạo các mặt cong trên miền tham số tam giác có bậc thấp từ lưới tam giác mô phỏng bề mặt của đối tượng 3D, cụ thể là các mặt cong Bézier tam giác, B-patch và B-spline tam giác. Hướng tiếp cận dựa trên tái hợp mảnh lưới để giảm bậc của mặt cong tham số tái tạo và sử dụng giải thuật xấp xỉ hình học nhằm tránh giải các hệ phương trình tuyến tính. Mô hình đề xuất gồm ba giai đoạn chính: tạo lưới điều khiển, dựng mặt cong và xấp xỉ hình học. Sự hội tụ của phương pháp đề xuất cũng được chứng minh về mặt toán học và thông qua các kết quả thực nghiệm. Hầu hết các mặt cong tham số được sử dụng trong thiết kế hình học có bậc thấp nên kết quả đạt được trong bài viết này có ý nghĩa thực tiễn.

Từ khóa: Sự hội tụ, tái tạo mặt cong, mặt cong tham số tam giác, tái hợp mảnh, xấp xỉ hình học.

I. GIỚI THIỆU

Mô hình hóa hình học trong không gian ba chiều đóng vai trò quan trọng trong quá trình mô phỏng, thiết kế và tái tạo bề mặt các đối tượng vật lý trên máy tính. Phần lớn các đối tượng được biểu diễn trên máy tính thông qua mô hình lưới đa giác. Mô hình này cho phép xử lý nhanh, trực quan và hiệu quả khi hiển thị, tô bóng bề mặt của đối tượng trong các lĩnh vực như GIS, CAGD, điện ảnh, giải trí... Tuy nhiên, lưới đa giác cũng có những hạn chế như: không có khả năng phân biệt các phần thấy, khuất của đối tượng; không nhận biết được các dạng đường cong; khó xác định chính xác vị trí của một điểm trên bề mặt đối tượng; không có khả năng kiểm tra va chạm giữa các đối tượng và khó khăn trong việc tính toán các đặc tính vật lý [11]...

Trong khi đó, mô hình mặt cong tham số không những cho phép biểu diễn bề mặt mềm mượt với độ liên tục cao, ổn định, mềm dẻo và điều chỉnh bề mặt cục bộ thông qua các đỉnh điều khiển; mà còn cung cấp các phép toán, giải thuật chi tiết để xác định vị trí của điểm bất kỳ trên bề mặt một cách chính xác và hiệu quả [9]. Nhờ đó, bên cạnh việc biểu diễn bề mặt của đối tượng trên máy tính trông thực hơn, mặt cong tham số còn có vai trò đặc biệt cho các ứng dụng có khả năng tương tác với bề mặt của đối tượng như: mô hình hóa hình dạng của đối tượng ảo, phát hiện va chạm, biến dạng bề mặt, tính toán phân lực trong công nghệ VR; tái tạo lại bề mặt trong RE; ánh xạ mẫu nền, kỹ xảo hoạt hình trong CG; mô phỏng bề mặt địa hình, xác định độ cao, nếp đứt gãy trong GIS; xác định khối lượng, diện tích bề mặt, thể tích, trọng tâm trong việc tính toán các đặc tính vật lý; tính toán sức căng, độ truyền nhiệt trong phương pháp phần tử hữu hạn,...

Việc chuyển đổi qua lại giữa hai dạng biểu diễn cho cùng một đối tượng nhằm khai thác thế mạnh của cả hai mô hình trên là mối quan tâm khoa học và có nhiều ứng dụng trong các ngành công nghiệp tiềm năng. Tái tạo mặt cong tron từ lưới đa giác vẫn đang là một trong những lĩnh vực nghiên cứu thiết thực và ngày càng được ứng dụng rộng rãi trong CG, CAGD, đặc biệt là trong RE và VR. Tuy nhiên, việc mô hình hóa mặt cong tron từ mặt lưới vẫn đang là lĩnh vực khó khăn và thách thức vì phải đối mặt với các vấn đề như: giải hệ phương trình tuyến tính, tham số hóa lưới, xây dựng lưới điều khiển, tối thiểu lỗi dịch chuyển, ước lượng mặt cong,... Do đó, tái tạo mặt cong tron từ lưới đa giác có hình dạng bất kỳ với độ chính xác cao vẫn đang là nhu cầu thực tiễn và mối quan tâm khoa học.

Hầu hết, các nghiên cứu về tái tạo mặt cong tron thường tập trung vào nội suy hoặc xấp xỉ các mặt cong tham số hoặc mặt cong phân mảnh về lưới đa giác. Vì vậy, các mặt cong kết quả thu được thường là mặt cong phân mảnh [4, 14] hoặc mặt cong trên miền tham số tứ giác như Bézier, B-Spline, NURBS [3, 6, 12, 15]. Các phương pháp tái tạo truyền thống thường nội suy hoặc xấp xỉ các mặt cong tham số tứ giác [12, 15]. Do đó, để biểu diễn bề mặt của đối tượng có hình dáng tự do, các phương pháp này phải phân đoạn lưới tứ giác biểu diễn bề mặt thành tập các lưới con và tái tạo các mặt cong từ các lưới con này, sau đó ghép nối chúng lại để tạo thành mặt cong tron hoàn chỉnh. Các mặt cong B-spline tứ giác được tái tạo bằng cách giải các hệ phương trình tuyến tính và áp dụng kỹ thuật bình phương tối thiểu để tăng độ chính xác. Sau đó, các B-spline này được kết nối liên tục để tạo nên một mặt cong có hình dạng bất kỳ mô tả bề mặt của đối tượng thực trên máy tính [12]. Mặc dù các phương pháp này sinh ra những mặt cong nội suy hoặc rất gần với các điểm dữ liệu, song các mặt cong này xuất hiện những gợn mấp mô, nếp gấp hoặc kẽ hở giữa các mặt cong liền kề, không được tron mượt do bậc cao. Mặt khác, khối lượng tính toán lớn và khó điều chỉnh hình dáng bề mặt một cách trực quan.

Để vượt qua các hạn chế này, gần đây các phương pháp dịch chuyển lặp lại đang được nghiên cứu và mở rộng. Các nghiên cứu này tái tạo mặt cong trơn bằng cách dịch chuyển các đỉnh điều khiển sao cho mặt cong đi qua các điểm dữ liệu hoặc hội tụ dần về lưới đa giác mô tả bề mặt của đối tượng thực. Khác với phương pháp truyền thống, các phương pháp này không chỉ tránh được chi phí tính toán do phải giải các hệ phương trình tuyến tính mà còn sinh ra một loạt các mặt cong xấp xỉ tốt bằng cách cập nhật và thay đổi vị trí các đỉnh điều khiển dựa trên kết quả tính toán khoảng cách giữa các điểm dữ liệu với mặt cong. Cách tiếp cận này mặc dù đã thu được kết quả khả quan, nhưng nhìn chung các mặt cong tái tạo được thường là mặt cong phân mảnh [4, 14] hoặc mặt cong trên miền tham số tứ giác [1, 3, 6, 10].

Mặc dù mặt cong phân mảnh đã trở nên phổ biến và cho phép biểu diễn bề mặt đa mức với hình dáng bất kỳ, nhưng khó có thể tính toán chính xác vị trí của từng điểm trên bề mặt cũng như khó điều khiển hình dáng bề mặt một cách cục bộ. Với những đối tượng có hình dáng bất kỳ, chỉ đòi hỏi bề mặt mềm, mượt khi nhìn bằng mắt, không cần tương tác hoặc xác định vị trí một cách chính xác lên bề mặt đối tượng thì mặt cong phân mảnh là một giải pháp hiệu quả [7]. Tuy nhiên, với những ứng dụng đòi hỏi tính toán chi tiết, chính xác và có thể truy cập đến vị trí bất kỳ, nhằm hỗ trợ cho khả năng tương tác đến bề mặt của đối tượng thì mặt cong tham số là sự lựa chọn đúng đắn.

Các mặt cong trên miền tham số tứ giác phổ biến như: Bézier tứ giác, B-spline tứ giác, NURBS,... thường có dạng tứ giác, bốn góc; do đó, để mô tả bề mặt phức tạp thì cần phải ghép nối liên tục nhiều mặt cong này lại với nhau. Nếu kết quả ghép nối không tốt sẽ xuất hiện các vết nối, nứt tại các đường nối, làm mất tự nhiên cho bề mặt cần biểu diễn [9]. Ngoài ra, nếu miền tham số không thể phân chia thành các tứ giác thì loại mặt cong tứ giác này không thích hợp cho việc mô phỏng bề mặt có hình dáng bất kỳ. Trong khi đó, việc phân chia miền tham số thành một lưới phẳng các tam giác thường tự nhiên và dễ dàng hơn rất nhiều.

Mặt cong trên miền tham số tam giác kế thừa các ưu điểm của B-spline một biến và mặt cong tham số tứ giác, cho phép kết nối mềm dẻo và phù hợp với bề mặt có hình dáng bất kỳ. Mặt khác, vì lưới điều khiển của loại mặt cong này là lưới tam giác, hay lưới không cấu trúc, nên cho phép biểu diễn với nhiều mức phân giải, phù hợp với dạng hình học phức tạp, ghép nối linh hoạt và xử lý hiệu quả [5]. Ngoài ra, bậc đa thức của mặt cong tham số tam giác thấp hơn so với bậc đa thức của mặt cong tham số tứ giác nên tiết kiệm chi phí tính toán hơn. Với một số ưu điểm đặc thù, các mặt cong tham số tam giác, đặc biệt là B-spline tam giác, đóng vai trò quan trọng và có triển vọng trong việc mô hình hóa hình học các bề mặt có hình dáng phức tạp cũng như thiết kế linh hoạt.

Một số nghiên cứu cũng đã tái tạo các mặt cong trên miền tham số tam giác như Bézier tam giác, B-patch, Spline đơn hình và B-spline tam giác [5, 8, 13],... Mặc dù các nghiên cứu này đã tạo ra các mặt cong trơn toàn cục nhưng một vài kết quả không thể điều khiển cục bộ hình dáng mặt cong. Hơn nữa, vì sử dụng lưới đầu vào như lưới điều khiển của mặt cong dịch chuyển nên đòi hỏi số đỉnh điều khiển phải bằng số điểm dữ liệu. Nếu dữ liệu đầu vào lớn sẽ cho mặt cong tham số kết quả có bậc rất cao, khi đó xuất hiện những nhấp nhô trên bề mặt thu được và làm tăng chi phí tính toán. Do đó, không phù hợp với lưới tam giác đầu vào có số điểm dữ liệu lớn.

Bài viết này đề xuất phương pháp tái tạo các mặt cong trên miền tham số tam giác có bậc thấp từ lưới tam giác mô phỏng bề mặt của đối tượng 3D, đồng thời chứng minh sự hội tụ của phương pháp đề xuất. Hướng tiếp cận dựa trên tái hợp mảnh lưới để giảm bậc của mặt cong tham số tam giác tái tạo được, đồng thời sử dụng giải thuật xấp xỉ hình học nhằm tránh giải các hệ phương trình tuyến tính. Kết quả phục vụ cho việc tính toán chi tiết, chính xác và hỗ trợ khả năng tương tác của đối tượng được mô phỏng trên máy tính. Từ đó cho phép ánh xạ mẫu nền, phân tích sớm và dễ dàng các đặc tính vật lý của bề mặt, hỗ trợ trong lập trình gia công, mô phỏng, phát hiện va chạm, tạo các biến dạng,... Đây cũng là nhu cầu cấp thiết mang tính thực tiễn và có nhiều ứng dụng, đặc biệt là trong lĩnh vực thiết kế và tạo mẫu mã sản phẩm, công nghệ thực tại ảo VR và công nghệ tái tạo ngược RE.

Phần còn lại của bài viết gồm các nội dung sau: phần II trình bày về tái hợp mảnh lưới; phần III đề xuất phương pháp tái tạo mặt cong trên miền tham số tam giác và chi tiết về giải thuật xấp xỉ hình học; sự hội tụ của phương pháp đề xuất được chứng minh ở phần IV; phần V trình bày các kết quả thực nghiệm; và phần cuối cùng tóm tắt một số kết quả quan trọng đạt được.

II. TÁI HỢP MẢNH LƯỚI

A. Phân mảnh lưới

Phân mảnh lưới cho phép biểu diễn bề mặt của đối tượng thực có hình dáng bất kỳ với nhiều mức phân giải khác nhau. Một lưới phân mảnh M bất kỳ được biểu diễn bởi $M = (P, F)$, trong đó P là tập các điểm dữ liệu và F là tập các mặt đa giác. Xét một lưới ban đầu $M^0 = (P^0, F^0)$, trong mỗi bước phân mảnh i , lưới $M^i = (P^i, F^i)$ được dùng để sinh ra lưới mịn hơn $M^{i+1} = (P^{i+1}, F^{i+1})$. Đây thực chất là phép ánh xạ từ tập F^i đến tập F^{i+1} và kết hợp với phép biến đổi affine trên tập điểm P^i . Các phép biến đổi này thường được mô tả bởi các mặt nạ hoặc các ma trận. Bắt đầu từ lưới M^0 , bằng cách thực hiện liên tiếp các bước phân mảnh thông qua các mặt nạ hay các ma trận biến đổi, các lưới M^1, M^2, M^3, \dots lần lượt được sinh ra và dần hội tụ về một mặt cong trơn được gọi là mặt cong phân mảnh [7].

Các nghiên cứu về phân mảnh để làm mịn lưới đa giác đã được công bố và phát triển, bao gồm các lược đồ phân mảnh như [7]: Catmul-Clark, Doo-Sabin, Loop, Butterfly, Kobbelt,... Với những vùng lưới đủ trơn mượt (kích thước

các mặt đều, đồng nhất, các góc giữa hai mặt liền kề đủ nhỏ), các lược đồ phân mảnh khác nhau vẫn cho kết quả gần như khó phân biệt được. Phân mảnh Catmull-Clark, Doo-Sabin và Kobbelt thích hợp cho các lưới tứ giác và không tốt đối với các lưới được tứ giác hóa từ lưới tam giác. Phân mảnh nội suy Butterfly tuy cho lưới kết quả gần với lưới góc hơn nhưng bề mặt lại không tốt, đặc biệt với những nếp gấp, phần sắc nhọn của bề mặt lưới thì phân mảnh Butterfly có thể cho chất lượng bề mặt thấp. Phân mảnh Loop tốt cho các lưới tam giác và ngay cả với những lưới được tam giác hóa từ lưới tứ giác [7].

Vì Loop là phân mảnh chèn đỉnh xấp xỉ nên lưới tam giác thu được sau phân mảnh Loop sẽ có xu hướng co lại so với các lưới ở những bước phân mảnh trước đó [7]. Điều này cũng có nghĩa là nếu áp dụng tái hợp mảnh cho một lưới tam giác thì lưới thu được sau mỗi bước tái hợp mảnh sẽ có xu hướng phồng lên và trở thành bao lồi của lưới này trước khi được tái hợp mảnh. Mặt khác, lược đồ phân mảnh Loop được xây dựng dựa trên cơ sở mặt cong spline nên mặt cong phân mảnh giới hạn là mặt cong spline trên miền tham số tam giác [2]. Đây cũng chính là phát hiện quan trọng để chọn tái hợp phân mảnh Loop trong hướng tiếp cận nhằm thô hóa lưới tam giác và sử dụng lưới này như lưới điều khiển của mặt cong tham số cần tái tạo.

B. Tái hợp mảnh trên lưới tam giác

Phân mảnh và tái hợp mảnh là hai quá trình ngược nhau. Phân mảnh làm tăng độ phân giải của đối tượng, trong khi đó tái hợp mảnh sẽ làm giảm độ phân giải của đối tượng đó. Do đó, tái hợp mảnh cho phép chuyển một lưới góc chi tiết thành lưới thô hơn, ít dữ liệu hơn nhưng vẫn không mất đi dạng hình học và cấu trúc hình học của lưới. Điều này giúp tiết kiệm không gian lưu trữ, giảm băng thông, phù hợp cho các ứng dụng đồ họa trên thiết bị di động và biểu diễn đa mức phụ thuộc vào điểm nhìn.

Với phân mảnh xấp xỉ Loop [2], khi áp dụng tái hợp mảnh, lưới thu được sẽ có số điểm dữ liệu giảm và có xu hướng phồng lên so với lưới trước khi tái hợp mảnh. Do đó, lưới tam giác sau tái hợp mảnh Loop phù hợp cho việc dựng mặt cong trên miền tham số tam giác khi sử dụng lưới này như lưới điều khiển hay bao lồi của mặt cong, tránh làm việc trên đa thức bậc cao, giảm mức mô ngoại mong muốn của mặt cong tham số thu được. Tại mỗi bước phân mảnh Loop, mỗi tam giác thuộc tập mặt F^i của lưới M^i được tách thành bốn tam giác con. Tập đỉnh mới P^{i+1} của lưới phân mảnh M^{i+1} được tạo ra và chia thành hai loại [2,7]: tập các điểm mới được chèn thêm vào các cạnh (điểm cạnh) và tập các điểm cũ được hiệu chỉnh lại vị trí (điểm đỉnh). Ngược lại, để xây dựng lưới thô M^i từ lưới mịn M^{i+1} , cần phải tìm ra mặt nạ để ánh xạ ngược tập đỉnh P^{i+1} thành tập P^i .

Nhận thấy khi thực hiện tái hợp mảnh, thông tin về vị trí các điểm cạnh không cần thiết cho việc xác định lại các đỉnh thuộc tập P^i , do đó các điểm cạnh này thừa và được loại bỏ. Trong khi đó, sau mỗi bước phân mảnh Loop, một điểm đỉnh mới thuộc tập P^{i+1} được tạo ra là kết hợp affine của một điểm gốc cũ trong bước phân mảnh liền trước đó và các đỉnh liền kề nó; với mục đích là điều chỉnh lại vị trí điểm gốc cũ này để tạo cho lưới sau phân mảnh trơn mịn hơn. Do đó trong quá trình tái hợp mảnh, các điểm đỉnh cần phải được giữ lại.

Giả sử vị trí các điểm đỉnh và lân cận của nó trong lưới M^{i+1} lần lượt ứng với các trọng số α và β . Để tái hợp mảnh Loop, ta cần xác định các trọng số μ và η tương ứng với α và β bằng công thức nghịch đảo. Từ công thức xác định các điểm đỉnh p^i và các lân cận của nó trên lưới M^{i+1} của phân mảnh Loop [2], các điểm đỉnh p^i của lưới M^i được xác định như sau:

$$p^i = \mu p^{i+1} + \eta \sum_{j=1}^l p_j^{i+1} \quad (1)$$

$$\text{Trong đó, } \alpha = 1 - l\beta; \quad \beta = \frac{1}{l} \left(\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \left(\frac{2\pi}{l} \right) \right)^2 \right); \quad \mu = \frac{5}{8\alpha - 3} \quad \text{và} \quad \eta = \frac{\alpha - 1}{l \left(\alpha - \frac{3}{8} \right)}$$

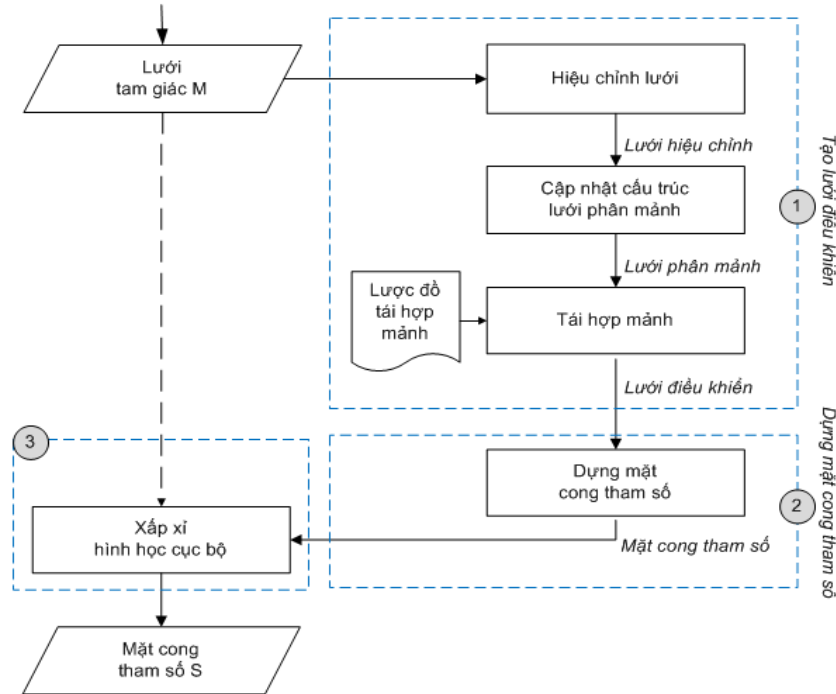
với l được gọi là bậc của đỉnh p^i . Trọng số α phụ thuộc vào l và được dùng để điều chỉnh độ mượt của mặt cong phân mảnh. Với mặt cong tham số tam giác bậc n , sau i bước tái hợp mảnh Loop lên lưới điều khiển, bậc của mặt cong này sẽ giảm còn $n/2^i$.

III. TÁI TẠO MẶT CONG TRÊN MIỀN THAM SỐ TAM GIÁC

Phần này trình bày phương pháp tái tạo các mặt cong trên miền tham số tam giác có bậc thấp từ lưới tam giác mô phỏng bề mặt của đối tượng 3D. Hướng tiếp cận dựa trên tái hợp mảnh lưới để giảm bậc của mặt cong tham số tam giác tái tạo, đồng thời sử dụng giải thuật xấp xỉ hình học nhằm tránh giải các hệ phương trình tuyến tính. Phương pháp đề xuất được phân thành ba giai đoạn chính:

- Tạo lưới điều khiển: mục đích của giai đoạn này là xử lý lưới tam giác ban đầu và tạo lưới điều khiển của mặt cong tham số;

- Dụng mặt cong tham số: giai đoạn này dụng mặt cong trên miền tham số tam giác với lưới điều khiển của mặt cong là lưới thu được ở giai đoạn 1;
- Xấp xỉ hình học: Tại mỗi bước dịch chuyển, giai đoạn này sẽ sinh ra một mặt cong tham số. Mặt cong này được so sánh độ lệch cục bộ trên từng điểm dữ liệu để xác định độ chính xác trong dịch chuyển, đồng thời dịch mặt cong hội tụ về lưới dữ liệu ban đầu.



Hình 1. Mô hình tái tạo mặt cong trên miền tham số tam giác.

Trong mô hình tái tạo mặt cong tham số thể hiện ở Hình 1, lưới tam giác M ban đầu được hiệu chỉnh và cập nhật cấu trúc để được lưới phân mảnh M^0 . Sau đó áp dụng lược đồ tái hợp mảnh Loop lên lưới M^0 để thu được lưới thô M^i . Lưới thô này được sử dụng làm lưới điều khiển để xây dựng mặt cong tham số S^i . Sau đó mặt cong này được xấp xỉ hình học để hội tụ dần về lưới M ban đầu. Các giai đoạn của phương pháp đề xuất được cụ thể như sau:

A. Tạo lưới điều khiển dùng tái hợp mảnh

Nhằm tái tạo các mặt cong trên miền tham số tam giác có bậc thấp với hướng tiếp cận dựa trên tái hợp mảnh, yêu cầu lưới tam giác ban đầu phải được hiệu chỉnh và cập nhật cho phù hợp với điều kiện của lưới điều khiển của mặt cong trên miền tham số tam giác và lưới phân mảnh. Để thỏa các điều kiện này, lưới tam giác ban đầu cần qua các bước xử lý sau:

- Hiệu chỉnh lưới: lưới M ban đầu được hiệu chỉnh cho phù hợp với lưới điều khiển của mặt cong. Việc hiệu chỉnh thường là xác định vị trí và bổ sung thêm một vài đỉnh để đủ số điểm cần thiết của lưới điều khiển mặt cong trên miền tham số tam giác;
- Cập nhật cấu trúc lưới: sau khi hiệu chỉnh, lưới tam giác M được cập nhật lại cấu trúc để phù hợp với lưới phân mảnh M^0 ;
- Đơn giản lưới dùng tái hợp mảnh: bằng cách áp dụng lược đồ tái hợp mảnh Loop, lưới phân mảnh M^0 sẽ được tái hợp mảnh sau i bước để trở thành lưới thô M^i . Như vậy, lưới M^i chính là lưới M^0 được thô hóa với kích thước giảm mạnh, số mặt chỉ còn lại 1/4 so với lưới M^{i-1} . Lưới này sẽ được sử dụng để dụng mặt cong ở giai đoạn tiếp theo.

B. Mặt cong tham số trên miền tam giác

Mặt cong trên miền tham số tam giác S được biểu diễn bởi phương trình tổng quát như sau [5, 9]:

$$F^{r,s,t}(u) = \sum_{j \in V^2} N_j^{r,s,t}(u) p_j \tag{2}$$

Trong đó, tham số $u \in \mathbb{R}^2$ được xác định trên miền tham số tam giác; các đỉnh điều khiển $p_{j|j=1..m}$ tạo thành lưới điều khiển và có dạng tam giác, với các chỉ số $j \in V^2$ tạo thành lưới tam giác phẳng và được xác định theo ba hướng u, v, w theo tọa độ tâm Barycentric; hàm cơ sở $N_j^{r,s,t}(u)$ bậc $r+s+t-2$ xác định trên miền tham số tam giác và tập nút V^2 . Hàm $N_j^{r,s,t}(u)$ cũng có các tính chất tương tự như hàm cơ sở của B-spline một biến và mặt cong tham số trên miền tứ

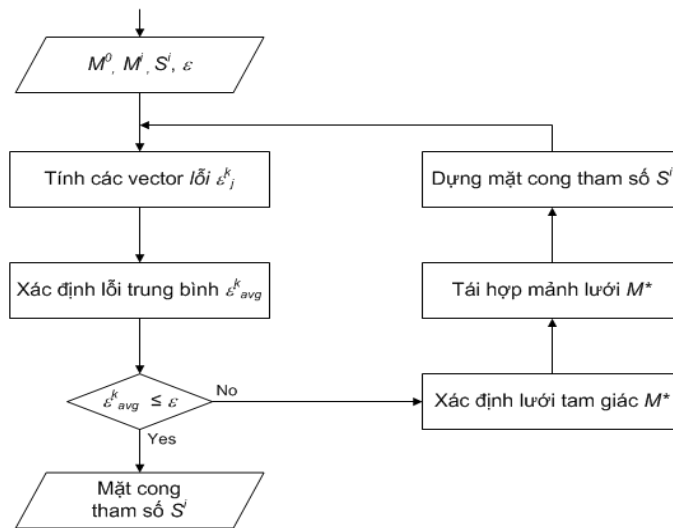
giác như [9]: đơn nhất, không âm, cục bộ và đệ quy... và là tích của ba hàm cơ sở spline độc lập tương ứng theo ba hướng u, v, w với bậc lần lượt là r, s, t :

$$N_j^{r,s,t}(u-j) \equiv N_{j_1}^r(u-j_1)N_{j_2}^s(v-j_2)N_{j_3}^t(w-j_3) \tag{3}$$

Trong số các mặt cong trên miền tham số tam giác đã được nghiên cứu thì mỗi dạng mặt cong đều có các đặc điểm riêng. Spline đơn hình mặc dù cho phép biểu diễn bề mặt trơn mềm toàn cục với hình dạng bất kỳ nhưng lại không cho phép điều chỉnh bề mặt thông qua các đỉnh điều khiển. Mặt cong G-patch cho phép điều chỉnh cục bộ bề mặt nhưng chỉ liên tục C^0 khi kết nối [5]. Nhận thấy các mặt cong Bézier tam giác, B-patch và B-spline tam giác có nhiều ưu điểm như [5]: bất biến affine, bao lồi, điều khiển cục bộ, liên tục, trơn mềm toàn cục, khả năng biểu diễn bề mặt có hình dạng bất kỳ... phù hợp cho mục đích tái tạo các bề mặt có hình dạng bất kỳ và có khả năng điều chỉnh hình dạng bề mặt thông qua các đỉnh điều khiển, thích hợp cho mô phỏng và thiết kế trên máy tính. Do đó chúng tôi chọn Bézier tam giác, B-patch và B-spline tam giác như là mặt cong kết quả tái tạo. Trong đó, mặt cong B-spline tam giác mặc dù chi phí tính toán lớn và phức tạp nhưng có ưu điểm là cho phép biểu diễn bề mặt có hình dáng tự do và liên tục một cách tự động giữa các mảnh cong mà không cần kết nối.

C. Giải thuật xấp xỉ hình học

Gọi M^0, M^i và S^i là các lưới và mặt cong tham số thu được sau khi thực hiện xong giai đoạn 1 và 2 trong mô hình đề xuất ở Hình 1, giá trị ϵ là dung sai của quá trình xấp xỉ hình học. Giải thuật xấp xỉ hình học cục bộ đề xuất được biểu diễn trên sơ đồ trong Hình 2.



Hình 2. Giải thuật xấp xỉ hình học.

Tại mỗi bước dịch chuyển thứ k , các bước thực hiện của giải thuật xấp xỉ hình học ở Hình 2 cụ thể như sau:

- Tính các vector lỗi dịch chuyển ϵ_j^k : ứng với mỗi điểm dữ liệu $p_j|_{j=1..m}$, xác định vector lỗi ϵ_j^k . Đây chính là độ lệch giữa điểm dữ liệu p_j và mặt cong tham số S^i :

$$\epsilon_j^k = \|p_j - S^i\| \tag{4}$$

- Xác định lỗi trung bình ϵ_{avg}^k : chính là trung bình cộng của các vector lỗi ϵ_j^k

$$\epsilon_{avg}^k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \epsilon_j^k \tag{5}$$

- Xác định lưới tam giác dịch chuyển M^* : sau khi xác định độ lệch giữa các điểm dữ liệu p_j và mặt cong tham số S^i , các điểm dữ liệu p_j được dịch chuyển để trở thành điểm p_j^* :

$$p_j^* = p_j + \epsilon_j^k \tag{6}$$

- Khi đó, lưới M^* là lưới tam giác được tạo bởi các điểm p_j^* ;
- Tái hợp mảnh lưới M^* : bằng cách áp dụng lược đồ tái hợp mảnh Loop lên lưới tam giác M^* , ta thu được lưới thô M^i sau i bước tái hợp mảnh;

- Dụng mặt cong tham số S^i : sử dụng lưới thô M^i như lưới điều khiển, mặt cong trên miền tham số tam giác S^i được dựng dựa trên lưới điều khiển này.

Trong quá trình xấp xỉ hình học, chuỗi các lưới tam giác M^* được tạo ra và các lưới này được thô hóa thành lưới M^i . Tương ứng, chuỗi các mặt cong tham số S^i lần lượt cũng được sinh ra. Các mặt cong này có xu hướng hội tụ dần về lưới ban đầu. Quá trình dịch chuyển dừng khi lỗi trung bình ϵ_{avg}^k bé hơn dung sai ϵ . Cuối cùng, mặt cong tham số tái tạo được sẽ xấp xỉ với các điểm dữ liệu ban đầu với lỗi trung bình nhỏ nhất.

Để tối thiểu hóa độ lệch giữa các điểm dữ liệu $p_{j|j=1..m}$ của lưới M với mặt cong tham số S^i , các đỉnh điều khiển của mặt cong này được điều chỉnh vị trí trong mỗi bước lặp trong quá trình xấp xỉ hình học. Đối với dạng mặt cong B-patch và B-spline tam giác, các vector nút cũng được cập nhật lại để tăng độ chính xác cho mặt cong được tái tạo.

IV. SỰ HỘI TỤ CỦA PHƯƠNG PHÁP ĐỀ XUẤT

Dựa trên phương pháp tái tạo mặt cong trên miền tham số tam giác đề xuất, mục này phân tích sự hội tụ của mặt cong tham số tái tạo được so với các điểm dữ liệu ban đầu để thấy được tính khả thi của phương pháp.

Cho m đỉnh điều khiển $p_{j|j=1..m}$. Các đỉnh này được dùng để dựng mặt cong tham số S trên miền $\Delta abc \subset R^2$:

$$S^0(u) = F^{r,s,t}(u) = \sum_{j \in V^2} N_j^{r,s,t}(u) p_j^0 \tag{7}$$

Trong đó, tham số $u \in \Delta abc$, đỉnh điều khiển $p_j^0 = p_j$ và hàm $N_j^{r,s,t}(u)$ có tính chất không âm hay $N_j^{r,s,t}(u) \geq 0$

Ban đầu, từ mặt cong $S^0(u)$, với mỗi bước dịch chuyển $k = 1, 2, \dots$ trong quá trình xấp xỉ hình học, ta thu được mặt cong $S^k(u)$. Để tạo ra mặt cong $S^{k+1}(u)$ tiếp theo tại bước $k+1$ thì các vector lỗi dịch chuyển được xác định như sau:

$$\epsilon_j^k = p_j - S^k(u_j) \tag{8}$$

Khi đó, các đỉnh điều khiển của mặt cong $S^{k+1}(u)$ tại bước $k+1$ tiếp theo sẽ là:

$$p_j^{k+1} = p_j^k + \epsilon_j^k \tag{9}$$

và mặt cong $S^{k+1}(u)$ xác định trên miền tham số Δabc như sau:

$$S^{k+1}(u) = \sum_{j \in V^2} N_j^{r,s,t}(u) p_j^{k+1} \tag{10}$$

Từ công thức (7), (8) và (9), ta có:

$$\begin{aligned} \epsilon_j^{k+1} &= p_j - S^{k+1}(u_j) = p_j - \sum_{j \in V^2} N_j^{r,s,t}(u_j) p_j^{k+1} = p_j - \sum_{j \in V^2} N_j^{r,s,t}(u_j) (p_j^k + \epsilon_j^k) \\ &= (p_j - S^k(u_j)) - \sum_{j \in V^2} N_j^{r,s,t}(u_j) \epsilon_j^k = \epsilon_j^k - \sum_{j \in V^2} N_j^{r,s,t}(u_j) \epsilon_j^k \end{aligned} \tag{11}$$

Công thức (11) được viết lại dưới dạng ma trận:

$$[\epsilon_1^{k+1} \quad \epsilon_2^{k+1} \quad \dots \quad \epsilon_m^{k+1}] = M [\epsilon_1^k \quad \epsilon_2^k \quad \dots \quad \epsilon_m^k] \tag{12}$$

Trong đó, $M = I - N$ với $I_{m \times m}$ là ma trận vuông đơn vị, N là ma trận với phần tử là các hàm cơ sở $N_j^{r,s,t}(u) \geq 0$ xác định trên các tham số $u \in \Delta abc$ và được biểu diễn như sau:

$$N = \begin{bmatrix} N_1^{r,s,t}(u_1) & N_2^{r,s,t}(u_1) & \dots & N_m^{r,s,t}(u_1) \\ N_1^{r,s,t}(u_2) & N_2^{r,s,t}(u_2) & \dots & N_m^{r,s,t}(u_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_1^{r,s,t}(u_m) & N_2^{r,s,t}(u_m) & \dots & N_m^{r,s,t}(u_m) \end{bmatrix} \tag{13}$$

Gọi $\lambda_j(u) \geq 0$, với $j = 1..m$, là các giá trị riêng của ma trận N . Vì các hàm cơ sở $N_j^{r,s,t}(u)$ có tính chất không âm, hay $N_j^{r,s,t}(u) \geq 0$, nên $\lambda_j(N) \geq 0$.

Mặt khác, các hàm cơ sở $N_j^{r,s,t}(u)$ có tính chất đơn vị, hay $\sum_{j=1}^m N_j^{r,s,t}(u) = 1$, nên dạng chuẩn $\|N\|_\infty \leq 1$ và $0 \leq \lambda_j \leq 1, \forall j = 0..m$. Do đó, $0 \leq \lambda_j \leq 1, \forall j = 0..m$ hay $0 \leq 1 - \lambda_j(N) = \lambda_j(I - N) = \lambda_j(M) \leq 1, \forall j = 1..m$.

Điều này thể hiện rằng cận trên đúng $\rho(M) < 1$, với $\rho(M) = \max\{\lambda_j\}$.

Vì vậy, dạng thức (12) hội tụ, hay $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_j^k = 0$, tương đương $\lim_{k \rightarrow \infty} S^k(u) = p_j, \forall j = 1..m$.

Điều này chứng tỏ mặt cong $S^k(u)$ hội tụ về các điểm $p_j |_{j=1..m}$ ban đầu.

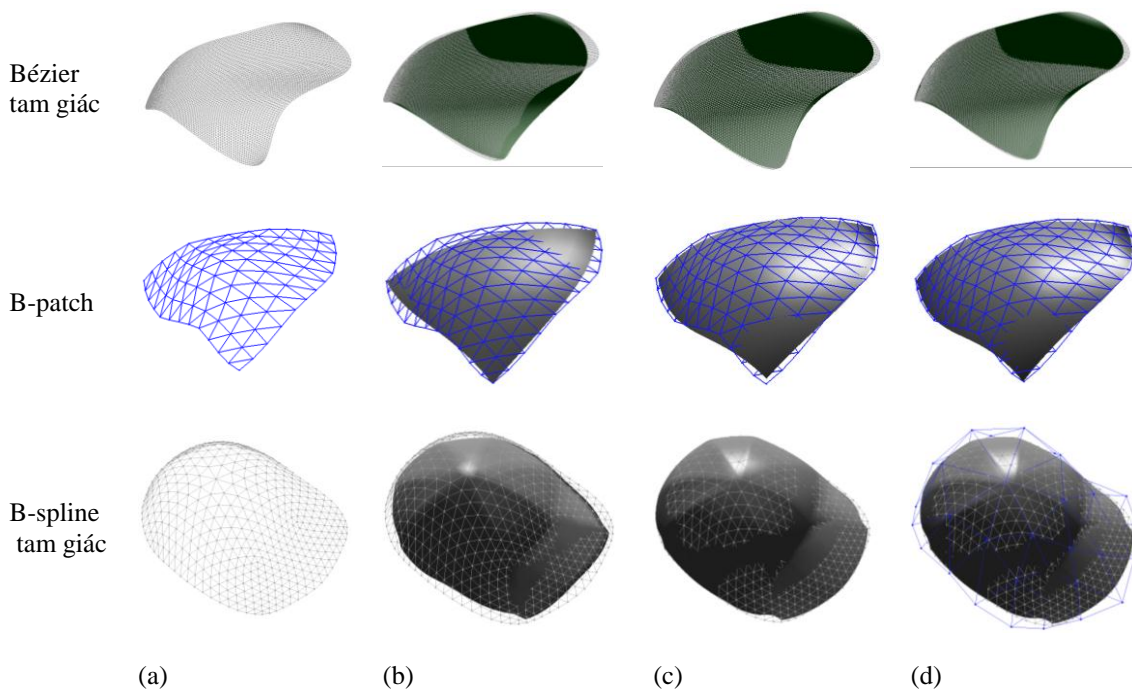
V. KẾT QUẢ THỰC NGHIỆM

Để thấy được tính khả thi của phương pháp tái tạo mặt cong trên miền tham số tam giác đề xuất, trong phần này chúng tôi tiến hành thử nghiệm cho cả ba dạng mặt cong gồm Bézier tam giác, B-patch và B-spline tam giác. Các kết quả đạt được trên Intel Core i5 CPU 2.67GHz với 4GB RAM.

Gọi i là số lần tái hợp mảnh; k là số bước dịch chuyển trong giải thuật xấp xỉ hình học; ε_{\max} , ε_{avg} và $N_\varepsilon(\%)$ lần lượt là độ lệch lớn nhất, độ lệch trung bình và độ hội tụ của mặt cong so với các điểm dữ liệu. Trong đó, N_ε được tính bằng tỉ lệ phần trăm của số điểm dữ liệu đi qua mặt cong so với tổng các điểm dữ liệu của lưới ban đầu. Thông tin về lưới ban đầu dùng để thử nghiệm và các dạng mặt cong tham số đạt được tương ứng thể hiện trong Bảng 1.

Bảng 1. Các mô hình thực nghiệm và mặt cong tham số kết quả đạt được tương ứng.

Dạng mặt cong tái tạo	Lưới ban đầu		i	k	Thời gian(s)	Mặt cong kết quả		
	#điểm	#mặt				#đỉnh	#mặt	bậc
Bézier tam giác	4753	9216	2	10	<1	325	575	24
B-patch	91	144	2	10	12	10	9	3
B-spline tam giác	453	832	2	10	68	36	13	2



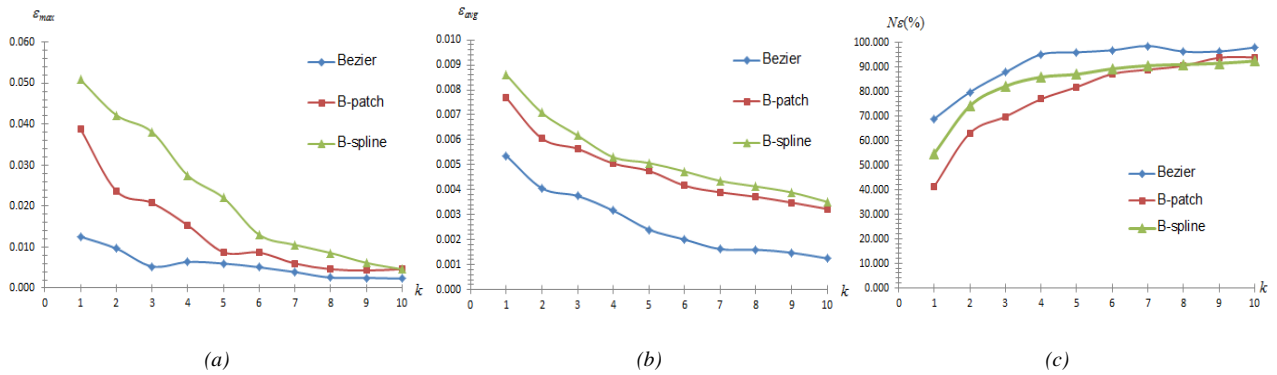
Hình 3. Tái tạo các mặt cong tham số Bézier tam giác, B-patch và B-spline tam giác: (a) lưới gốc, (b, c, d) các mặt cong đạt được so với lưới gốc sau $k = 1, 5, 7$ bước dịch chuyển.

Hình 3 minh họa các lưới ban đầu và các mặt cong trên miền tham số đạt được so với lưới gốc sau $k = 1, 5, 7$ bước dịch chuyển trong giải thuật xấp xỉ hình học. Nhận thấy sau bước dịch chuyển đầu tiên $k = 1$, độ chênh giữa mặt cong tham số thu được và lưới gốc còn khá lớn, đặc biệt là phần biên của mặt cong và đường biên của lưới gốc. Tuy nhiên sau $k = 5, 7$ bước dịch chuyển, phần biên của mặt cong được dịch dần về các biên của lưới gốc. Đồng thời các phần còn lại của mặt cong như được “giãn ra” và dịch dần về các điểm dữ liệu của lưới ban đầu. Sự chênh lệch của mặt cong thu được so với lưới gốc cũng giảm ở bước dịch chuyển $k = 5$ và $k = 7$. Bằng cách áp dụng $i = 2$ lần tái hợp mảnh, các mặt cong trên miền tham số tam giác thu được sau quá trình tái tạo có bậc thấp hơn nhiều so với việc sử dụng lưới ban đầu như lưới điều khiển.

Bảng 2. Độ lệch lớn nhất ϵ_{max} , độ lệch trung bình ϵ_{avg} và độ hội tụ N_ϵ (%) đạt được sau k bước dịch chuyển.

k	Bézier tam giác			B-patch			B-spline tam giác		
	ϵ_{max}	ϵ_{avg}	N_ϵ (%)	ϵ_{max}	ϵ_{avg}	N_ϵ (%)	ϵ_{max}	ϵ_{avg}	N_ϵ (%)
1	0.012535	0.005366	68.869	0.038759	0.007678	41.340	0.050843	0.008605	54.736
2	0.009669	0.004061	79.749	0.023724	0.006053	63.013	0.042221	0.007084	74.096
3	0.005288	0.003751	87.790	0.020769	0.005641	69.739	0.038096	0.006174	82.127
4	0.006369	0.003168	95.083	0.015311	0.005053	76.889	0.027457	0.005305	85.873
5	0.006002	0.002406	95.972	0.008753	0.004758	81.810	0.022018	0.005075	87.022
6	0.005086	0.002018	96.828	0.008667	0.004166	87.157	0.012983	0.004735	89.266
7	0.003902	0.001623	98.567	0.006003	0.003900	88.918	0.010551	0.004356	90.549
8	0.002548	0.001602	96.289	0.004603	0.003720	90.464	0.008579	0.004136	91.004
9	0.002509	0.001482	96.319	0.004283	0.003487	93.771	0.006159	0.003895	91.480
10	0.002316	0.001253	97.956	0.004648	0.003234	93.971	0.004591	0.003516	92.417

Bảng 2 thể hiện chi tiết các thông số về độ lệch và độ hội tụ đạt được trong quá trình tái tạo thông qua $k = 10$ bước dịch chuyển đầu tiên. Nhận thấy rằng các độ lệch ϵ_{max} và ϵ_{avg} tỉ lệ nghịch với số bước dịch chuyển k , trong khi đó, độ hội tụ N_ϵ (%) lại tỉ lệ thuận với k . Điều này cho thấy sau vài bước dịch chuyển, mặt cong tham số thu được hội tụ dần về các điểm dữ liệu của lưới ban đầu.



Hình 4. Ảnh hưởng của số bước dịch chuyển k đối với độ chính xác của mặt cong tham số tái tạo theo: (a) độ lệch lớn nhất ϵ_{max} , (b) độ lệch trung bình ϵ_{avg} và (c) độ hội tụ N_ϵ (%)

Hình 4 cho thấy sự hội tụ của mặt cong tham số trong quá trình xấp xỉ hình học. Độ lệch lớn nhất và độ lệch trung bình giảm mạnh trong năm bước dịch chuyển đầu tiên (Hình 4a, b), sau đó ổn định dần ở các bước dịch chuyển còn lại và nằm trong khoảng $0.002 \div 0.004$ đối với độ lệch ϵ_{max} và $0.001 \div 0.003$ đối với độ lệch ϵ_{avg} . Trong khi đó, độ hội tụ N_ϵ (%) tăng mạnh trong ba bước dịch chuyển đầu, sau đó ổn định dần và nằm trong khoảng $92\% \div 97\%$. Trong đó mặt cong Bézier tam giác cho kết quả tốt hơn hẳn với độ lệch thấp hơn và độ hội tụ cao hơn. Điều này có thể giải thích là do miền tham số của Bézier tam giác không có các vector nút tại các điểm góc. Do đó, ngoài vị trí của các đỉnh điều khiển thì cấu hình các vector nút cũng ảnh hưởng phần nào đến kết quả của mặt cong tái tạo.

VI. KẾT LUẬN

Dựa trên tiếp cận tái hợp mảnh lưới để giảm bậc của mặt cong tái tạo cùng với giải thuật xấp xỉ hình học cục bộ nhằm tránh giải các hệ phương trình tuyến tính, bài viết đề xuất phương pháp mới cho phép tái tạo các mặt cong trên miền tham số tam giác có bậc thấp. Phương pháp đề xuất đạt được một số kết quả sau:

- Không phải giải các hệ phương trình tuyến tính và xấp xỉ bình phương tối thiểu, đồng thời khai thác tính đơn giản và trực quan của phương pháp xấp xỉ hình học;
- Bằng cách áp dụng lược đồ tái hợp mảnh lên lưới tam giác nên mặt cong được tái tạo có bậc thấp hơn nhiều so với việc sử dụng lưới ban đầu như lưới điều khiển;
- Mặt cong tái tạo được là các mặt cong trên miền tham số tam giác, nên cho phép biểu diễn mềm dẻo và điều chỉnh cục bộ hình dáng mặt cong thông qua các đỉnh điều khiển. Đặc biệt, mặt cong B-spline tam giác cho phép biểu diễn bề mặt tự động trơn mềm toàn cục với hình dáng bất kỳ;
- Sự hội tụ của quá trình tái tạo mặt cong cũng đã được chứng minh về mặt toán học và thông qua các kết quả thực nghiệm để thấy được tính khả thi của phương pháp đề xuất.

Mặc dù đã thu được một số kết quả ban đầu, tuy nhiên kết quả nghiên cứu vẫn còn một số tồn tại:

- Các mặt cong Bézier tam giác và B-patch được tái tạo thực chất là các mảnh cong và hình dáng bề mặt có dạng tam giác. Do đó, để biểu diễn bề mặt có hình dạng bất kỳ thì các mảnh cong này cần phải được kết nối liên tục, đây cũng là một hướng nghiên cứu tiếp theo;

- Độ hội tụ khi tái tạo các mặt cong tham số B-patch và B-spline tam giác chưa cao. Điều này có thể giải thích là do kết quả của việc điều chỉnh vector nút trên miền tham số của dạng mặt cong này chưa hiệu quả rõ rệt. Đây cũng là một vấn đề mở và thách thức khi nghiên cứu về B-patch và B-spline tam giác.

Mặt cong tái tạo được là các mặt cong trên miền tham số tam giác có bậc thấp, do đó thích hợp cho việc biểu diễn và thiết kế hình học. Ngoài ra, lưới điều khiển của mặt cong giảm mạnh khi áp dụng tái hợp mảnh, do đó kết quả này còn phù hợp trong nền dữ liệu 3D, trao đổi dữ liệu trên môi trường mạng không dây và trên các thiết bị di động.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A. Abbas, A. Nasri, T. Maekawa. "Generating B-spline curves with points, normals and curvature constraints: a constructive approach", The Visual Computer, vol.26(6-8), pp.823-829, 2010.
- [2] C. Loop. "Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles", M. S. Mathematics thesis, University of Utah, 1987.
- [3] C.Deng, H. Lin, "Progressive and iterative approximation for least squares B-spline curve and surface fitting", Computer-Aided Design, vol.47, pp.32-44, 2014.
- [4] C. Deng, W. Ma, "Weighted progressive interpolation of Loop subdivision surfaces", Computer-Aided Design, vol.44, pp.424-31, 2012.
- [5] Christopher K, Ingram, "A Geometric B-Spline Over the Triangular Domain", M. S. Mathematics thesis, 2003.
- [6] D. J. Yoo. "Three-dimensional surface reconstruction of human bone using a B-spline based interpolation approach", Computer-Aided Design, vol.43(8), pp.934-947, 2011
- [7] Denis Zorin, Peter Schroder, "Subdivision for Modeling and Animation", SIGGRAPH Course Notes, 2000.
- [8] Dian Pratiwi. "The Implementation of Univariate and Bivariate B-Spline Interpolation Method in Continuous", IJCSI International Journal of Computer Science Issues, vol.10(2), March 2013.
- [9] G. Greiner, "Geometric modeling", Lecture in Winter Term, 2010.
- [10] Jie Chen, Guo-Jin Wang, "Progressive iterative approximation for triangular Bézier surfaces", Computer-Aided Design, vol.43, pp.889-895, 2011.
- [11] Kobbelt and et al, "Geometric Modeling Based on Triangle Meshes", EuroGraphics, 2006.
- [12] M. Eck, H. Hoppe, "Automatic reconstruction of B-spline surfaces of arbitrary topological type", In Proceedings of SIGGRAPH96, ACM Press, pp.325-334, 1996.
- [13] Seidel HP, "Symmetric recursive algorithms for surfaces: b-patches and the de Boor algorithm for polynomials over triangles", Constructive Approximation, 7, 257-279, 1991.
- [14] T. Maekawa, Y. Matsumoto, K. Namiki, "Interpolation by geometric algorithm", Computer-Aided Design, vol.39, pp.313-323, 2007.
- [15] Y. Kineri, M. Wang, H. Lin, T.Maekawa, "B-spline surface fitting by iterative geometric interpolation/approximation algorithms", Computer-Aided Design, vol.44(7), pp.697-708, 2012.
- [16] Yu Zhao, Hongwei Lin, "The PIA property of low degree non-uniform triangular B-B patches", In Proceedings of the 12th International Conference on CAD and CG, pp.239-243, 2011.

THE CONVERGENCE OF RECONSTRUCTING SURFACES OVER TRIANGULAR PARAMETRIC DOMAIN BASED ON INVERSE SUBDIVISION AND GEOMETRIC APPROXIMATION

Le Thi Thu Nga, Nguyen Tan Khoi, Nguyen Thanh Thuy

ABSTRACT: The surfaces over triangular parametric domain inherit many interesting properties of univariate B-splines and rectangular parametric surfaces, allow joining flexibly and suit arbitrary topological type. Therefore, they play an important role in versatile designing as well as the prospect of geometric modeling. In this paper, a method for reconstructing surfaces over the triangular parametric domain with the low degree is proposed, particularly triangular Bezier, B-patch, triangular B-spline. This approach is that based on inverse subdivision scheme to reduce the degree of the reconstructed parametric surfaces and avoids solving linear systems by using a geometric approximate algorithm. The given technique consists of three major steps as follows: create control mesh, construct parametric surface and approximate the surface to the mesh. Its convergence is also proved. Most of the low degree surfaces often employed in the geometric design, and then this result still has practical significance.

Keywords: Convergence, reconstructing surface, triangular parametric surface, inverse subdivision, geometric approximation.