

# THIẾT KẾ HÀM BIẾN ĐỔI ĐỘ XÁM DẠNG CHỮ S TĂNG CƯỜNG ĐỘ TƯƠNG PHẢN ẢNH SỬ DỤNG ĐẠI SỐ GIA TỬ

Nguyễn Văn Quyền<sup>1</sup>, Trần Thái Sơn<sup>2</sup>, Nguyễn Tân Ân<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Phòng Quản lý Sau đại học, Trường Đại học Hải Phòng

<sup>2</sup> Viện Công nghệ thông tin, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

<sup>3</sup> Khoa Công nghệ thông tin, Học viện Quản lý Giáo dục

quyenqlkh.dhhp@gmail.com, ttson@ioit.ac.vn, nguyentanan@yahoo.com

**TÓM TẮT:** Nâng cao độ tương phản ảnh có hai phương pháp chính (1) phương pháp gián tiếp và (2) phương pháp trực tiếp. Trong khi các phương pháp gián tiếp chỉ biến đổi histogram mà không sử dụng bất kỳ một độ đo tương phản nào, các kỹ thuật này cũng chỉ tác động lên toàn ảnh chứ không tác động lên từng điểm ảnh thì các phương pháp trực tiếp thiết lập các điều kiện của phép đo độ tương phản và tác động trực tiếp lên từng điểm ảnh. Theo hướng trực tiếp, Cheng và cộng sự đã sử dụng logic mờ đưa ra quy trình và thuật toán tăng độ đo tương phản tại từng điểm ảnh. Những tiếp cận sử dụng logic mờ để nâng cao độ tương phản ảnh nói chung đều dẫn đến thiết kế một hàm biến đổi mức xám dạng chữ S. Tuy nhiên, logic mờ rất khó tạo ra hàm biến đổi mức xám dạng chữ S. Phương pháp của Cheng tạo ra hàm biến đổi mức xám dạng chữ S nhưng không đối xứng, điều này có thể dẫn đến giá trị mức xám sau biến đổi nằm ngoài miền giá trị của độ xám. Trong bài báo này chúng tôi trình bày một phương pháp xây dựng hàm biến đổi giá trị mức xám có dạng chữ S tăng cường độ tương phản ảnh theo hướng tiếp cận trực tiếp dựa trên Đại số gia tử.

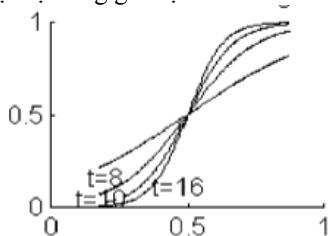
**Từ khóa:** Nâng cao độ tương phản ảnh trực tiếp, S-function, Toán tử tăng cường mờ, Phân cụm mờ, Đại số gia tử, Histogram mờ, Ảnh đa kênh.

## I. GIỚI THIỆU

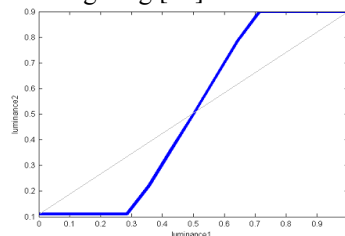
Nâng cao độ tương phản ảnh là một vấn đề quan trọng trong xử lý và phân tích hình ảnh. Đây là một bước cơ bản trong phân đoạn ảnh [1]. Có hai phương pháp thông dụng để nâng cao độ tương phản ảnh (1) phương pháp gián tiếp và (2) phương pháp trực tiếp [2]. Có rất nhiều kỹ thuật đã được đề xuất [1, 4, 5, 6, 7, 8], hầu hết trong số đó là phương pháp gián tiếp, chúng biến đổi histogram mà không sử dụng bất kỳ một độ đo tương phản nào. Các kỹ thuật này chỉ tác động lên toàn ảnh chứ không tác động lên từng điểm ảnh. Phương pháp trực tiếp đã chứng tỏ tính hiệu quả so với phương pháp gián tiếp [10]. Cụ thể, phương pháp trực tiếp cho phép sử dụng các hàm biến đổi tăng độ đo tương phản tại từng điểm ảnh [3, 4] nhưng vẫn bảo toàn chất lượng ảnh.

Theo hướng trực tiếp, trong [3, 4] Cheng và cộng sự đã đưa ra quy trình và thuật toán để tăng độ đo tương phản tại từng điểm ảnh. Trong [3] Cheng và Hu sử dụng nguyên lý entropy cực đại và lý thuyết tập mờ để nâng cao độ tương phản của ảnh sau khi được mờ hóa và đưa ra thuật toán tăng độ tương phản dựa trên một độ đo thuần nhất do họ xây dựng. Kết quả thử nghiệm đã chứng tỏ các phương pháp này là khá hiệu quả. Tuy nhiên các thuật toán tăng giá trị độ đo tương phản trong [3, 4] đều dựa trên một số hàm biến đổi độ tương phản cụ thể, không xác định được mối ràng buộc đồng thời về giá trị điểm ảnh và thông tin của lân cận điểm ảnh, do đó biên của ảnh không được tăng cường sau khi nâng cao độ tương phản.

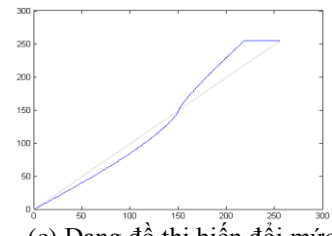
Những tiếp cận sử dụng logic mờ để nâng cao độ tương phản ảnh nói chung đều dẫn đến thiết kế một hàm biến đổi mức xám dạng chữ S [3, 6, 11]. Hàm liên tục đơn điệu tăng, giảm giá trị đầu vào khi đầu vào dưới ngưỡng và ngược lại tăng giá trị đầu vào khi đầu vào ở trên ngưỡng [11].



(a) Toán tử NINT [6]



(b) Dạng đồ thị của hàm biến đổi mức xám sinh bởi hệ luật mờ if-then [11]



(c) Dạng đồ thị biến đổi mức xám của [3]



(d) Ảnh kết quả sử dụng suy diễn luật if-then [11] cho ảnh #1

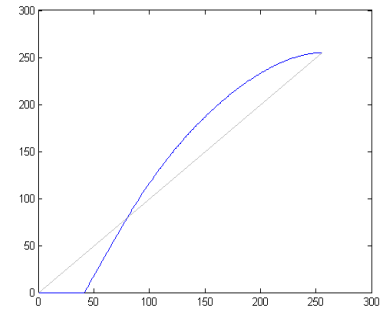
**Hình 1.** Dạng hàm biến mức xám chữ S trong các phép NCĐTP



(a) Ảnh gốc



(b) Ảnh kết quả sinh bởi toán tử tăng cường mờ [11]



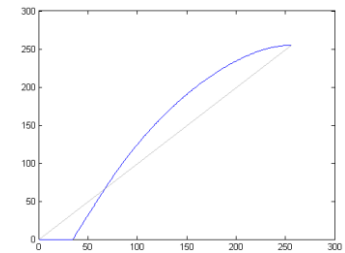
(c) Dạng hàm biến đổi



(d) Ảnh gốc



(e) Kết quả sinh bởi toán tử tăng cường mờ [11]



(g) Dạng hàm biến đổi

**Hình 2.** Một số thử nghiệm nâng cao độ tương phản cho ảnh màu tiếp cận sử dụng toán tử tăng cường mờ [11]

Trong bài báo này chúng tôi sẽ đề xuất phương pháp thiết kế hàm biến đổi có đồ thị dạng chữ S (kiểu S-function) sử dụng tiếp cận đại số gia tử (ĐSGT) ứng dụng cho việc nâng cao độ tương phản theo phương pháp trực tiếp. Phần còn lại của bài báo được cấu trúc như sau: Phần II trình bày các nghiên cứu liên quan; Phần III trình bày thuật toán được đề xuất; Các kết quả thực nghiệm trình bày trong phần IV; Kết luận được đưa ra ở phần V.

## II. CÁC NGHIÊN CỨU LIÊN QUAN

### A. Các định nghĩa liên quan

**Định nghĩa 1:** Độ đo tương phản

Trong quang học, độ tương phản C được định nghĩa bằng [12]

$$C(f, b) = \left| \frac{f - b}{f + b} \right| \tag{1}$$

trong đó f là độ sáng của đối tượng, và b là độ sáng vùng xung quanh.

Nâng cao độ tương phản theo phương pháp trực tiếp là biến đổi:  $C' = T(C(f,b))$  và  $f'$  được xác định  $0 < C(f,b) < C'$ .

$$f' = \begin{cases} f \frac{1 - C'}{1 + C'}, & f \leq b \\ f \frac{1 + C'}{1 - C'}, & f \geq b \end{cases} \tag{2}$$

Trong [8] cũng giới thiệu một số độ đo tương phản khác cho ảnh.

**Nhận xét:** Nếu  $f' = T(f)$  là một hàm tăng cường (intensification) tại b, tức là

$$\begin{cases} f' = T(f) \leq f, & f \leq b \\ f' = T(f) \geq f, & f \geq b \end{cases} \tag{3}$$

Thì T(f) có độ tương phản với b cao hơn độ tương phản của f với b.

**Định nghĩa 2:** S-function [3]

Trong lý thuyết tập mờ, Zadeh đã định nghĩa một toán tử tăng cường gọi là INT (intensification) và dạng tổng quát của nó được gọi là S-function, được xác định như sau:

$$S(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ \frac{x - a^2}{b - a - c - a}, & a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{x - c^2}{c - b - c - a}, & b \leq x \leq c \\ 1, & c \leq x \end{cases} \tag{4}$$

Trong [3] Cheng và cộng sự đã sử dụng hàm S-function để chuyển một ảnh xám sang miền mờ, sau đó nghiên cứu nâng cao độ tương phản của ảnh trong miền mờ.

Độ sáng xung quanh điểm ảnh  $\delta_{ij}$  được xác định dựa trên độ thuần nhất [4]

$$C_{ij} = \left| \frac{g_{ij} - \delta_{ij}}{g_{ij} + \delta_{ij}} \right| \tag{5}$$

gọi  $d$  bán kính lân cận điểm ảnh  $g_{ij}$ , các bước (a-g) để tính  $\mu_{ij}$ ,  $\delta_{ij}$  cụ thể như sau:

a. Cường độ biên:

$E=\{e_{ij}\}$  là giá trị cường độ biên ảnh xám đầu vào bằng một toán tử xác định biên ảnh như toán tử Sobel.

b. Giá trị trung bình, độ lệch chuẩn

$\mu=\{\mu_{ij}\}$ ,  $v=\{v_{ij}\}$ , trong đó  $\mu_{ij}$  là giá trị trung bình mức xám,  $v_{ij}$  là độ lệch chuẩn mức xám lấy tại lân cận điểm ảnh  $(i, j)$ .

$$\mu_{ij} = \frac{\sum_{(p,q) \in W_{ij}} g_{pq}}{d^2} \tag{6}$$

trong đó:  $w_{ij}$  cửa sổ lân cận tại điểm ảnh  $(i,j)$ ;  $g_{pq}$  là mức xám của điểm ảnh  $(p,q)$ ;  $d$  là kích thước cửa sổ  $w_{ij}$ .

$$v_{ij} = \sqrt{\frac{\sum_{(p,q) \in W_{ij}} g_{pq} - \mu_{ij}^2}{d^2}} \tag{7}$$

c. Entropy  $h=\{h_{ij}\}$ ,

$$h_{ij} = - \frac{\sum_{k=1}^L p_k \log p_k}{2 \log d} \tag{8}$$

$$p_k = \frac{\# (p, q) \in W_{ij} : g_{pq} = k}{d^2} \tag{9}$$

là số các mức xám của các điểm ảnh trong lân cận  $g_{ij}$ ,  $k$  là chỉ số kênh ảnh.

d. Moment bậc bốn ( $\gamma_4$ ):  $\gamma_4=\{\gamma_{4ij}\}$

$$\gamma_{4ij} = \frac{\sum_{(p,q) \in W_{ij}} g_{pq} - \mu_{ij}^4}{d^2 - 1} \tag{10}$$

e. Chuẩn hóa

$$E(g_{ij}, W_{ij}) = \frac{e_{ij}}{\max e_{ij}}, V(g_{ij}, W_{ij}) = \frac{v_{ij}}{\max v_{ij}}, H(g_{ij}, W_{ij}) = \frac{h_{ij}}{\max h_{ij}}, R_4(g_{ij}, W_{ij}) = \frac{\gamma_{ij}}{\max \gamma_{ij}} \tag{11}$$

f. Độ thuần nhất  $\beta=\{\beta_{ij}\}$

$$\beta_{ij} = \frac{HO_{ij}}{\max HO_{ij}} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} HO(g_{ij}, W_{ij}) &= \overline{E(g_{ij}, W_{ij})} * \overline{V(g_{ij}, W_{ij})} * \overline{H(g_{ij}, W_{ij})} * \overline{R_4(g_{ij}, W_{ij})} \\ &= (1 - E(g_{ij}, W_{ij})) * (1 - V(g_{ij}, W_{ij})) * (1 - H(g_{ij}, W_{ij})) * (1 - R_4(g_{ij}, W_{ij})) \end{aligned} \tag{13}$$

g.  $\delta=\{\delta_{ij}\}$ ,

$$\delta_{ij} = \frac{\sum_{(p,q) \in W_{ij}} g_{pq} \psi_{pq}}{\sum_{(p,q) \in W_{ij}} \psi_{pq}}, \psi_{pq} = 1 - \beta_{pq} \tag{14}$$

**B. Phân tích thuật toán Cheng**

1. Dải động của mức xám

Dựa trên histogram của ảnh, trong [3, 4] các tác giả nhận thấy đỉnh đầu tiên của histogram của ảnh liên quan đến vùng nền và mức xám lớn hơn đỉnh sau cùng có thể là nhiễu. Vì vậy các tác giả đã đề xuất cách xác định dải động của mức xám như sau:

Dải động mức xám là đoạn [a, c]:

$$a = \min\{(1-f_2)(g_1-L_{\min}) + L_{\min}, B_1\},$$

$$c = \max\{f_2(L_{\max}-g_k) + g_k, B_2\}$$
(15)

Trong đó  $B_1, B_2$  được xác định:

$$\sum_{i=L_{\min}}^{B_1} His(i) \approx f_1 \sum_{i=L_{\min}}^{L_{\max}} His(i),$$

$$\sum_{i=B_2}^{L_{\max}} His(i) \approx f_1 \sum_{i=L_{\min}}^{L_{\max}} His(i)$$
(16)

$L_{\min}, L_{\max}$  là giá trị mức xám nhỏ nhất và lớn nhất của ảnh, các hằng số  $f_1 = 0.01, f_2 = 0.5$  được xác định bằng thực nghiệm.

$$His_{\max}(g) = \frac{\sum_{i=1}^k His_{\max}(g_i)}{k},$$

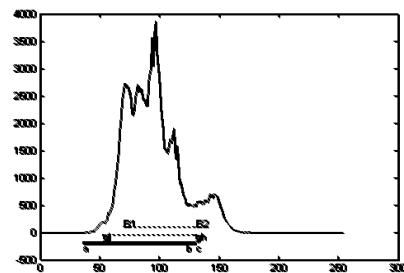
$k$  là số điểm cực đại địa phương của histogram.

2. Phép mờ hóa kênh ảnh

Cheng và cộng sự đã sử dụng hàm S-function để biểu diễn mờ hóa ảnh xám với các tham số a, c là đoạn dải động mức xám được ước lượng với tham số b bằng phép tối ưu hóa độ đo Entropy của ảnh.



Hình 3. Ảnh gốc



Hình 4. Dải động của ảnh:  $a=36, b_{opt}=123, c=131, B_1=70, B_2=131, g_1=53, g_h=130$ .



Ảnh gốc



S-function  $HX(a, b_{opt}, c)$  [3]



NINT [6]

Hình 5. Biểu diễn mờ sử dụng S-function và NINT

Dựa trên độ đo thuần nhất của điểm ảnh, trong công thức (11) trong [4] Cheng và cộng sự đã xác định độ tương phản khuếch đại  $c'_{ij} = c_{ij}^{st}$ , trong đó:

$$\xi_{ij} = \xi_{\min} + \frac{\xi_{\max} - \xi_{\min} * \beta_{ij} - \beta_{\min}}{\beta_{\max} - \beta_{\min}} \quad (17)$$

với  $\xi_{\min} = \frac{g_k - g_1}{g_{\max} - g_1}$  và hằng số  $t$  xác định bằng thực nghiệm,  $t \in (0, 1)$ .

Khi đó với  $c_{ij} = \left| \frac{g_{ij} - \delta_{ij}}{g_{ij} + \delta_{ij}} \right|$ , ta có biến đổi tăng cường độ tương phản là:

$$g'_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} \frac{1 - c'_{ij}}{1 + c'_{ij}} = \delta_{ij} \frac{1 - c_{ij}^{\xi_{ij}}}{1 + c_{ij}^{\xi_{ij}}}, & g_{ij} \leq \delta_{ij} \\ \delta_{ij} \frac{1 + c'_{ij}}{1 - c'_{ij}} = \delta_{ij} \frac{1 + c_{ij}^{\xi_{ij}}}{1 - c_{ij}^{\xi_{ij}}}, & g_{ij} > \delta_{ij} \end{cases} \quad (18)$$

Để làm mềm hơn sự phân vùng mềm mức xám của công thức (18) ta cần chia nhỏ  $[g_{\min}, g_{\max}]$  theo mốc  $\delta_{ij}$  thành nhiều hơn 2 phần, có sự liên hệ với độ đo tương phản  $c_{ij}$ . Xem xét công thức (2) ta thấy  $b$  là một ngưỡng tự nhiên phân chia miền mức xám.

Phần còn lại của bài báo trình bày phương pháp sử dụng toán tử tăng cường dựa trên (ĐSGT để đạt được các yêu cầu đặt ra trên.

### III. THUẬT TOÁN ĐỀ XUẤT

#### A. Định nghĩa và các tính chất hình thức

**Định nghĩa 3:** Bộ 3  $(AX, AY, F)$  gọi là toán tử HA-tăng cường (HA-intensification) nếu:

(i)  $AX = (X, C, w, H, \leq)$ ,  $AY = (Y, C, w, H, \leq)$  với  $\text{Dom}(X) \equiv \text{Dom}(Y)$ ,  $C = \{c^-, c^+\}$ ,  $c^- = \mathbf{low}$ ,  $c^+ = \mathbf{high}$ ,  $H = H^- \cup H^+$ ,  $H^- = \{\mathbf{little}\}$ ,  $H^+ = \{\mathbf{very}\}$ ,  $\theta = \text{fm}(c^-)$ ,  $1 - \theta = \text{fm}(c^+)$ ,  $\alpha_X = \mu_X(\mathbf{little})$ ,  $\beta_X = 1 - \alpha_X = \mu_X(\mathbf{very})$ ,  $\alpha_Y = \mu_Y(\mathbf{little})$ ,  $\beta_Y = 1 - \alpha_Y = \mu_Y(\mathbf{very})$ ,  $\theta, \alpha_X, \alpha_Y \in [0, 1]$ ,  $v_X, v_Y$  là hàm định lượng ngữ nghĩa của ĐSGT trên  $X$  và  $Y$  tương ứng.

$$(ii) \frac{v_Y(v.\mathbf{low})}{v_X(\mathbf{low})} < 1$$

(iii) Hàm  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  đơn điệu tăng thực sự, liên tục (suy ra hàm ngược của  $F$  cũng đơn điệu tăng thực sự, liên tục) và tăng cường tại ngưỡng  $\theta$ :

Nếu  $x$  là  $c^-$  thì  $y$  là  $c^-$ .

Nếu  $x$  là  $c^+$  thì  $y$  là  $c^+$ .

Nếu  $x$  là  $W$  thì  $y$  là  $W$ .

Nếu  $x$  là  $\mathbf{low}$  thì  $y$  là  $v.\mathbf{low}$  (**very low**).

Nếu  $x$  là  $\mathbf{high}$  thì  $y$  là  $v.\mathbf{high}$  (**very high**).

Diễn giải trong miền giá trị số: (i) và (ii) tương đương với:

$$F(v_X(c^-)) = v_Y(c^-), F(\theta) = \theta, F(v_X(c^+)) = v_Y(c^+)$$

$$F(v_X(\mathbf{low})) = v_Y(v.\mathbf{low})$$

$$F(v_X(\mathbf{high})) = v_Y(v.\mathbf{high})$$

$$\text{Suy ra : } F(0) = 0, F(\theta) = \theta, F(1) = 1.$$

$$F \beta_X \theta = \beta_Y^2 \theta, F 1 - \beta_X 1 - \theta = 1 - \beta_Y^2 1 - \theta$$

(iii) tương đương với

$$\begin{cases} F(t) \leq t, \forall t : 0 \leq t \leq \theta \\ F(t) \geq t, \forall t : \theta \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Nhận xét:**

(i)  $\theta = \alpha_X = \alpha_Y = 0.5 \Rightarrow \beta_X = \beta_Y = 0.5,$

$$m = \frac{v_Y(\text{verylow})}{v_X(\text{low})} = \frac{\beta_Y^2 \theta}{\beta_X \theta} = 0.5, F \equiv INT, \text{ ở đó } INT(x) = \begin{cases} 2x^2, 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1 - 2(1-x)^2, 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

thì (AX, AY, INT) là một HA-intensification.

(ii) Khi  $m = \frac{\beta_Y^2}{\beta_X}, \beta_Y < \beta_X$

thì một hàm bậc 2, F có đồ thị là parabol đi qua 3 điểm (0; 0),  $(\beta_X \theta, \beta_Y^2 \theta)$ ,  $(\theta, \theta)$  thì bộ 3 (AX, AY, F) không là HA-intensification.

Chứng minh:

$$F(x) = \frac{x}{\theta \alpha_X} (1-m)x + \theta(m - \beta_X), 0 \leq x \leq \theta$$

$F(0)=0.$  Do  $\alpha_X = 1 - \beta_X,$  nên  $F(\beta_X \theta) = \beta_Y^2 \theta, F(\theta)=\theta.$

Do  $\beta_Y < \beta_X, m = \frac{\beta_Y^2}{\beta_X} < \beta_X,$  nên  $F(x) < 0$  với  $0 \leq x < \frac{\theta(\beta_X - m)}{1-m}$

vậy (AX, AY, F) không là một HA-intensification.

Từ nhận xét trên ta thấy trong trường hợp tổng quát không thể dùng S-function để xây dựng một HA-intensification.

**Mệnh đề 1:** (AX, AY, F) là một HA-intensification, với F được xác định như sau:

$$m = \frac{v_Y(\text{verylow})}{v_X(\text{low})} = \frac{\beta_Y^2}{\beta_X} < 1$$

$$F(x) = \begin{cases} g(x), 0 \leq x \leq \theta \\ 1 - g(1-x), \theta \leq x \leq 1 \end{cases}$$

với hàm  $g(x_s)$  xác định:  $g(x) = \frac{ax^2}{\theta - x + ax}, 0 \leq x \leq \theta$  ở đây  $a = \frac{m(1 - \beta_X)}{1 - m \beta_X}$

Chứng minh:

$$g(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ x \frac{a}{\frac{\theta}{x} - 1 + a}, 0 < x \leq \theta \end{cases}$$

Để thấy  $g(0)=0, g(\beta_X \theta) = \beta_Y^2 \theta, g(\theta)=\theta$  và g đơn điệu tăng trên đoạn  $[0, \theta],$  từ đó suy ra (AX, AY, F) là một HA-intensification.

**Định lý 1:**  $m = \frac{v_Y(v.\text{low})}{v_X(\text{low})} = \frac{\beta_Y^2}{\beta_X} < 1,$

$$H \text{ int}(x) = \begin{cases} g_c(\theta, \beta_X, m)(x), 0 \leq x \leq \theta \\ 1 - g_c(1-\theta, \beta_X, m)(1-x), \theta \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{19}$$

với hàm  $g_c(\theta, \beta_x, m)$  ( $x_s$ ) xác định như sau:

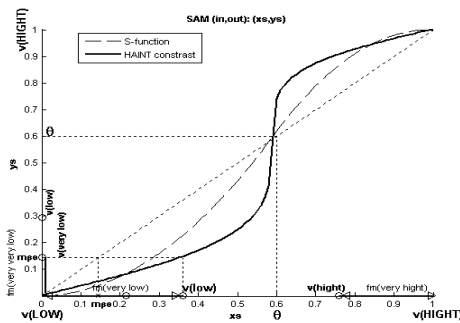
$$\gamma = \gamma(\beta_x, m) = \frac{\log\left(\frac{1 - m\beta_x}{1 + m\beta_x}\right)}{\log\left(\frac{1 - \beta_x}{1 + \beta_x}\right)}, \quad g_c(x) = \theta \frac{1 - \left(\frac{\theta - x}{\theta + x}\right)^\gamma}{1 + \left(\frac{\theta - x}{\theta + x}\right)^\gamma} = \theta \frac{\theta + x}{\theta + x}^\gamma - \frac{\theta - x}{\theta - x}^\gamma, \quad 0 \leq x \leq \theta \tag{20}$$

hay  $\frac{\theta - g_c(x)}{\theta + g_c(x)} = \left(\frac{\theta - x}{\theta + x}\right)^\gamma, \quad \forall 0 \leq x \leq \theta,$

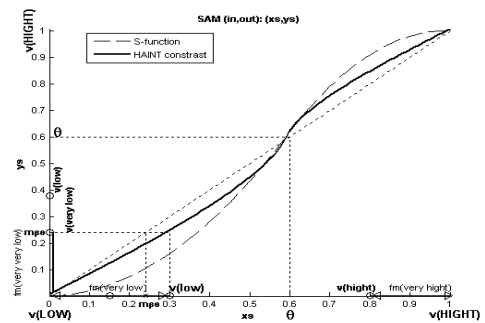
tham số  $\gamma = \gamma(\beta_x, m) = \frac{\log\left(\frac{1 - m\beta_x}{1 + m\beta_x}\right)}{\log\left(\frac{1 - \beta_x}{1 + \beta_x}\right)},$

Khi đó (AX, AY, Hint) là một HA-intensification, ngoài ra Hint thỏa mãn:

$$\max_{(0, \beta_x \theta]} \frac{H \text{ int}(x)}{x} = \min_{[\beta_x \theta, \theta]} \frac{H \text{ int}(x)}{x} = m, \quad \max_{[\theta + \alpha_x \theta, 1]} \frac{1 - H \text{ int}(1 - x)}{1 - x} = \min_{[\theta + \alpha_x \theta, 1]} \frac{1 - H \text{ int}(1 - x)}{1 - x} = m$$



**Hình 6.** trường hợp  $\theta=0.6; \beta_x=0.6 > m=0.4.$



**Hình 7.** trường hợp  $\theta=0.6; \beta_x=0.5 < m=0.8.$

Chứng minh: xem phụ lục.

Các hàm  $g, g_c$  ở mệnh đề 1 và định lý 1 đều thỏa các tính chất sau:

- (i) Đơn điệu tăng, khả vi liên tục trên  $[0, 1]$
- (ii)  $g(\theta, \beta_x, m)(0) = 0, g(\theta, \beta_x, m)(\theta) = \theta, g(\theta, \beta_x, m)(\beta_x \theta) = m\beta_x \theta$   
 $0 \leq g(\theta, \beta_x, m)(x) \leq x, \quad \forall 0 \leq x \leq \theta.$
- (iii)  $g(\theta, \beta_x, m_1)(x) \leq g(\theta, \beta_x, m_2)(x),$

$$\forall 0 \leq x \leq \theta, 0 < m_1 \leq m_2 < \max_{(0, \beta_x \theta]} \frac{g(\theta, \beta_x, m)(x)}{x} = \min_{[\beta_x \theta, \theta]} \frac{g(\theta, \beta_x, m)(x)}{x} = m$$

**B. Thuật toán nâng cao độ tương phản sử dụng toán tử tăng cường của ĐSGT**

Trong mục này chúng tôi đề xuất hai thuật toán để áp dụng toán tử tăng cường HINT để nâng cao độ tương phản cho ảnh đa kênh. Chi tiết của hai thuật toán được thể hiện như sau:

**Thuật toán 1:** Nâng cao độ tương phản một kênh

**Đầu vào:** Kênh ảnh của ảnh  $I = \{I(i, j)\}$

**Đầu ra:** Kênh ảnh tăng cường

**Bước 1:** Tính các giá trị không thuần nhất:  $\delta_{ij}$ , độ khuếch đại  $\xi_{ij}$  theo Cheng, công thức (14), (17)

Công thức sử dụng HINT để tăng độ tương phản được cho như sau:

**Bước 2:** Chuẩn hóa về [0, 1]

Với giá trị mức xám đầu vào  $g_{ij}$ , ta xác định giá trị chuẩn hóa:

$$g_{ij} = \frac{g_{ij} - g_{\min}}{g_{\max} - g_{\min}}, \delta_{ij} = \frac{\delta_{ij} - g_{\min}}{g_{\max} - g_{\min}}$$

**Bước 3:** Xác định ĐSGT cho các biến ngôn ngữ và gán tham số

Xây dựng bộ 3 ( $AX_{ij}, AY_{ij}, Hint_{ij}$ ) là một HA-intensification với tham số như sau:

$$\theta_{ij} = \delta_{ij}, \beta_{X_{ij}} = 0.5, \beta_{Y_{ij}} = \sqrt{\beta_{X_{ij}} \xi_{ij}}, m = \xi_{ij}.$$

**Bước 4:** Nâng cao độ tương phản của từng điểm ảnh

Khi đó  $c_{ij} = \left| \frac{g_{ij} - \delta_{ij}}{g_{ij} + \delta_{ij}} \right|$ , ta có biến đổi tăng cường độ tương phản là  $c'_{ij} = c_{ij}^{\gamma_{ij}}$ ,

ở đây 
$$\gamma_{ij} = \frac{\log\left(\frac{1 - \xi_{ij} \beta_{X_{ij}}}{1 + \xi_{ij} \beta_{X_{ij}}}\right)}{\log\left(\frac{1 - \beta_{X_{ij}}}{1 + \beta_{X_{ij}}}\right)},$$

$$\xi_{ij} = \xi_{\min} + \frac{\xi_{\max} - \xi_{\min} * \beta_{ij} - \beta_{\min}}{\beta_{\max} - \beta_{\min}}$$

với  $\xi_{\min} = \frac{g_k - g_1}{g_{\max} - g_1}$

Sử dụng công thức (19), (20) ta tính giá trị độ xám chuẩn hóa trong [0, 1]  $g'_{ij}$  như sau:

$$g'_{ij} = H \text{int } \delta_{ij}, \beta_X, \xi_{ij} \quad g_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} \frac{\delta_{ij} + g_{ij}^{\gamma_{ij}} - \delta_{ij} - g_{ij}^{\gamma_{ij}}}{\delta_{ij} + g_{ij}^{\gamma_{ij}} + \delta_{ij} - g_{ij}^{\gamma_{ij}}}, & g_{ij} \leq \delta_{ij} \\ 1 - 1 - \delta_{ij} \frac{2 - \delta_{ij} - g_{ij}^{\gamma_{ij}} - g_{ij} - \delta_{ij}^{\gamma_{ij}}}{2 - \delta_{ij} - g_{ij}^{\gamma_{ij}} + g_{ij} - \delta_{ij}^{\gamma_{ij}}}, & g_{ij} > \delta_{ij} \end{cases}$$

**Bước 5:** Kết thúc, trả lại ảnh nâng cao  $\{ g'_{ij} * (L_{\max} - L_{\min}) + L_{\min} \}$

Thuật toán 1 có độ phức tạp  $O(MN)$ , trong đó M, N là kích thước của ảnh.

Trong [4] đã trình bày một cách xác định dải động của miền giá trị mức xám bằng cách sử dụng thuật toán phân cụm mờ FCM, khi đó các cụm ảnh có tính chất đều trơn và do đó xác định các dải mức xám của từng cụm tương đối dễ dàng.

Trong [10], chúng tôi đã sử dụng thuật toán phân cụm mờ FCM, phân ảnh thành C cụm (C=5 trong thực nghiệm), và nhận được biểu diễn mờ của ảnh ban đầu là:

$$\mu_{i,j,c} \quad 1 \leq c \leq C, \text{ trong đó với mọi điểm ảnh (i, j),}$$

$$0 \leq \mu_{i,j,c} \leq 1, 1 \leq c \leq C,$$

$$\sum_{1 \leq c \leq C} \mu_{i,j,c} = 1$$



$$0 < \sum_{(i,j)} \mu_{i,j,c}, \forall 1 \leq c \leq C$$

$\forall 1 \leq c \leq C$ , ta xác định histogram mờ của cụm  $c$  như sau:

$$h_c(g_{ij}) = \sum \mu_{i,j,c}, \text{ từ đó ta xác định được dải động mức xám của cụm } c \text{ là } B_{1,c}, B_{2,c}: \quad (21)$$

$$\sum_{g=L_{\min}}^{B_{1,c}} h_c(g) \approx f_1 \sum_{g=L_{\min}}^{L_{\max}} h_c(g), \sum_{g=B_{2,c}}^{L_{\max}} h_c(g) \approx f_1 \sum_{g=L_{\min}}^{L_{\max}} h_c(g) \quad (22)$$

$L_{\min}, L_{\max}$  là giá trị mức xám nhỏ nhất và lớn nhất của ảnh tương ứng với kênh ảnh, hằng số  $f_1 = 0.01$

$$g_{ij,c} = \frac{g_{ij} - B_{1,c}}{B_{2,c} - B_{1,c}}, \delta_{ij,c} = \frac{\delta_{ij} - B_{1,c}}{B_{2,c} - B_{1,c}} \quad (23)$$

$$g_{k,ij} = \frac{\sum_{c=1}^{NC} \min \left\{ \max \left\{ \frac{l - B_{ck1}}{B_{ck2} - B_{ck1}}, 0 \right\}, 1 \right\}}{C}$$

Với ảnh gồm  $K$  kênh, chúng ta vẫn thực hiện việc phân thành  $C$  cụm như thông thường và định nghĩa histogram mờ theo từng kênh  $k, 1 \leq k \leq K$  như sau:

$$\forall g, L_{k,\min} \leq g \leq L_{k,\max}, h_c^k(g) = \sum_{(i,j) \in g_{ij} = g_{ij}^1, g_{ij}^2, \dots, g_{ij}^K : g_{ij}^k = g} \mu_{i,j,c} \quad (24)$$

**Thuật toán 2:** Nâng cao độ tương phản ảnh đa kênh  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$

**Đầu vào:**  $K$  kênh của ảnh  $I$  (trong một biểu diễn màu),  $I_{1,K} = \{I_1, I_2, \dots, I_K\}$ , tham số  $C \in N^+, C \geq 2, M \times N$  là kích thước của ảnh  $I, \beta_1 \dots \beta_k$ , các tham số của đại số gia tử

**Đầu ra:** Ảnh  $I' = \{I'_1, I'_2, \dots, I'_k\}$

**Bước 1:** Phân ảnh  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$  thành  $C$  cụm sử dụng thuật toán FCM

**Bước 2:** Tính histogram mờ của từng kênh ảnh  $I_k, k = 1, \dots, K$  sử dụng công thức (24)

**Bước 3:** Tính độ xám nâng cao trong đoạn  $[0, 1]$

$$g_{k,ij} = \text{Hint} \left( \delta_{ij,c}, \beta_{x_{ij}}, \xi_{ij} \right) \left( \frac{\sum_{c=1}^{NC} \min \left\{ \max \left\{ \frac{l - B_{ck1}}{B_{ck2} - B_{ck1}}, 0 \right\}, 1 \right\}}{C} \right) \quad (25)$$

**Bước 4:** Kết thúc, trả lại ảnh nâng cao  $\{g_{k,ij}^* (L_{k,\max} - L_{k,\min}) + L_{k,\min}, 1 \leq k \leq K\}$

Ở đây, ta đánh giá độ phức tạp theo kích thước  $M \times N$  của ảnh đầu vào. Các yếu tố khác tham gia vào độ phức tạp của thuật toán như số cụm  $C$  được coi là hằng số.  $NK$  là số lần lặp của thuật toán lặp FCM chuẩn thì thuật toán FCM có độ phức tạp là  $O(MN)$ . Phép tính histogram mờ của 3 kênh ảnh  $R, G$  và  $B$  của ảnh đầu vào có độ phức tạp là  $O(1)$ . Phép tính giá trị mức xám mới sử dụng biến đổi Hint có độ phức tạp là  $O(MN)$ .

Vậy độ phức tạp thuật toán là  $O(MN)$ .

#### IV. THỰC NGHIỆM

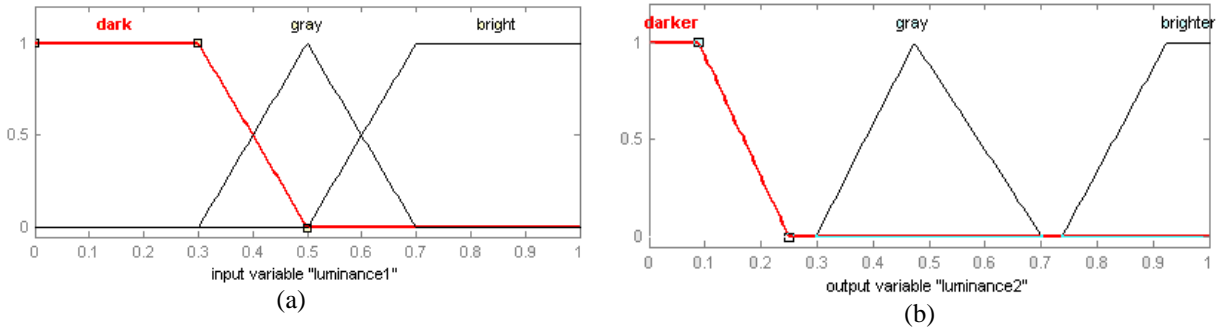
Tập ảnh màu (đánh số #1, #2... #6) được dùng để thể hiện trong khuôn khổ bài báo này thu nhận từ tập ảnh RGB được công bố trong [13] (ảnh từ #3 đến #5 trong Hình 13), ảnh vệ tinh LANDSAT ETM+ chụp khu vực huyện Lạc Thủy, Hòa Bình ngày 15/02/2001 của Việt Nam (ảnh #6 trong Hình 13).

Tuy nhiên việc lựa chọn hàm thuộc trong suy diễn hệ luật mờ để tạo ra hàm biến đổi mức xám có dạng chữ S không phải là việc dễ dàng. Xét hệ luật mờ

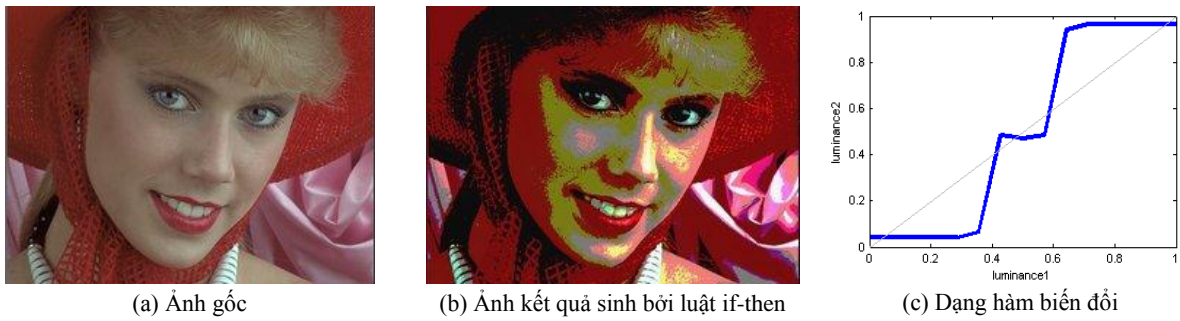
**R1:** *If luminance1 is dark then luminance2 is darker*

**R2:** If *luminance1* is **bright** then *luminance2* is **brighter**

**R3:** If *luminance1* is **gray** then *luminance2* is **gray**

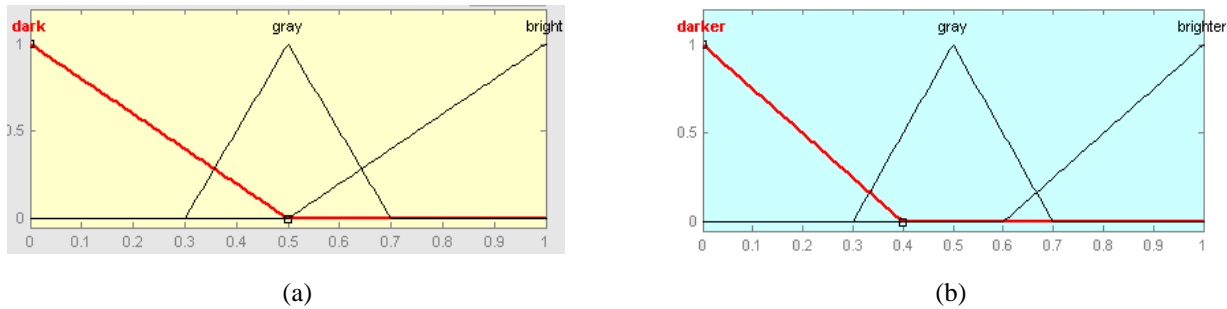


**Hình 8.** Hàm thuộc của 3 tập mờ **dark**, **bright**, **gray** (a) và của tập mờ **darker**, **brighter** (b).

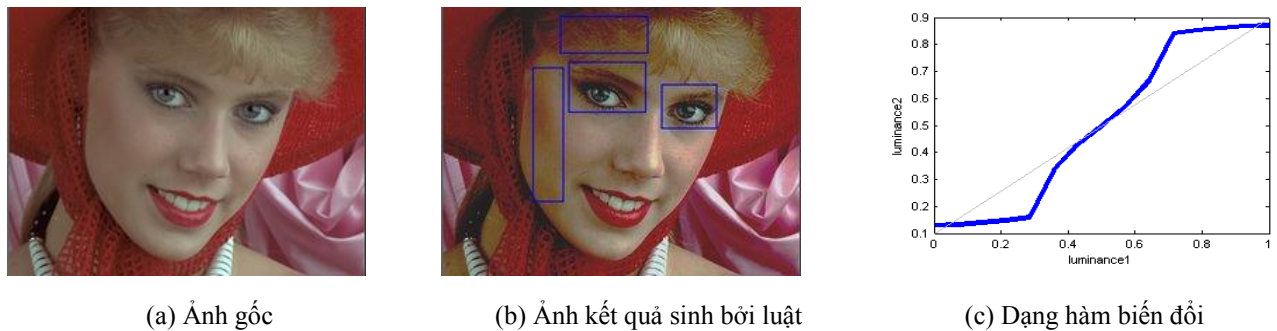


**Hình 9.** Nâng cao độ tương phản với suy diễn luật mờ if-then (a), luật mờ nâng cao độ tương phản (b).

Ngay cả với việc đạt được hàm biến đổi mức xám có dạng chữ S thì kết quả lập luận mờ của hệ luật {R1, R2 và R3} sử dụng các tập fuzzy có thể cho kết quả chưa hợp lý, như ví dụ thiết kế các hàm thuộc sau:



**Hình 10.**(a) Hàm thuộc của tập mờ **dark**, **bright**, **gray** và (b) hàm thuộc của tập mờ **darker**, **brighter**.



**Hình 11.** Các hàm thuộc được thiết kế đã tạo ra hàm biến đổi hình chữ S.

Trong hình 11.b vùng đánh dấu chữ nhật cho thấy có hiện tượng nâng cao quá mức (over-enhancement).

Chúng ta sẽ thấy như dưới đây ĐSGT có thể thiết kế rất nhanh hàm biến đổi mức xám dạng chữ S cho hệ luật mờ:

**R1:** If *luminance1* is **dark** then *luminance2* is **very dark**

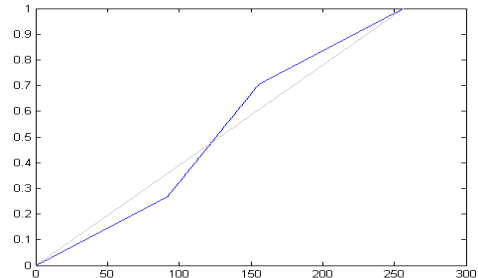
**R2:** If *luminance1* is **bright** then *luminance2* is **very bright**

**R3: If luminance1 is gray then luminance2 is gray**

Thật vậy, trên từng kênh ảnh  $I_k \in \{R, G, B\}$  của ảnh màu RGB gốc, thiết lập 2 ĐSGT  $AL_1$  và  $AL_2$  như sau:  $AX_k = (X_k, C, w, H, \leq)$ ,  $AY_k = (Y_k, C, w, H, \leq)$  với  $Dom(X_k) \equiv Dom(Y_k)$ ,  $C = \{c^-, c^+\}$ ,  $c^- = \mathbf{dark}$ ,  $c^+ = \mathbf{bright}$ ,  $H = H^- \cup H^+$ ,  $H^- = \{\mathbf{little}\}$ ,  $H^+ = \{\mathbf{very}\}$ ,  $\theta_k = fm(c^-)$ ,  $1 - \theta_k = fm(c^+)$ ,  $\alpha_{Xk} = \mu_{Xk}(\mathbf{little})$ ,  $\beta_{Xk} = 1 - \alpha_{Xk} = \mu_{Xk}(\mathbf{very})$ ,  $\alpha_{Yk} = \mu_{Yk}(\mathbf{little})$ ,  $\beta_{Yk} = 1 - \alpha_{Yk} = \mu_{Yk}(\mathbf{very})$ ,  $\theta_k, \alpha_{Xk}, \alpha_{Yk} \in [0,1]$ . Thử nghiệm với  $\alpha_{Xk} = 0.4$ ,  $\alpha_{Yk} = 0.4$ ,  $\theta_k$  là ngưỡng Otsu của kênh ảnh  $I_k$ .



(a) Ảnh kết quả phép nội suy HA-INTd cho ảnh #1



(b) Đồ thị hàm biến đổi mức xám kiểu chữ S và đối xứng

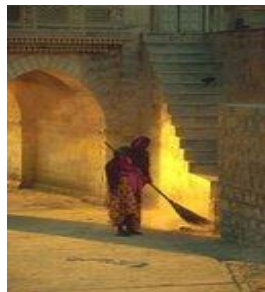
**Hình 12.** Phép NCDTP sử dụng HA-INTd cho hệ luật  $\{R1,R2,R3\}$

Điều đặc biệt ở đây là đồ thị biến đổi là dạng chữ S đối xứng, điều này khác biệt cơ bản với các đồ thị sinh bởi lập luận mờ sử dụng tập mờ như đã trình bày ở Hình 1 và Hình 2.

Khi đánh giá kết quả thuật toán 1 và thuật toán 2 của chúng tôi so với thuật toán gốc được công bố trong [4], ngoài đánh giá trực giác, chúng tôi sẽ sử dụng các chỉ số khách quan để đánh giá.



#1: Kích thước 352x254



#2: Kích thước 256x384



#3: Kích thước 512x384



#4: Kích thước 512x384



#5: Kích thước 512x384



#6: Kích thước 633x647

**Hình 13.** 6 ảnh gốc được dùng cho trình bày thử nghiệm.

Các chỉ số đánh giá khách quan độ tương phản ảnh được dùng trong bài báo này cụ thể là:

(i) Chỉ số độ tương phản trực tiếp được lấy trung bình trên toàn bộ các điểm ảnh của một kênh ảnh  $I_k$ , so với một kênh ảnh gốc  $I_k$  ( $I_k'$  và  $I_k$  có cùng kích thước  $M \times N$ ), chúng được cho như sau:

$$CM(I_k, I_k') = \frac{\sum_{i,j} \frac{|I_k'(i, j) - \delta_{k,ij}|}{I_k'(i, j) + \delta_{k,ij}}}{MN} \tag{26}$$

ở đây  $\delta_{k,ij}$  là giá trị mức xám không thuận nhất tại điểm ảnh  $(i, j)$  của  $I_k$  (xem ký hiệu ở Bảng 1, và xem [4]).

(ii) Chỉ số entropy được lấy trung bình trên toàn bộ các điểm ảnh và các kênh ảnh, chúng được cho như sau:

$$E(I_k) = - \sum_{g=L_{\min_k}}^{L_{\max_k}} p_k(g) \log_2(p_k(g))$$

$$E_{avg}(I_{1,K}) = \frac{\sum_{k=1}^K E(I_k)}{K}, \text{ trong đó } p_k(g) \stackrel{def}{=} \frac{\# I_k(i, j) = g}{MN} \text{ và quy ước } 0 \cdot \log_2(0) = 0. \quad (27)$$

Giá trị của chỉ số entropy cao thì có thể xem ảnh là giàu tính chi tiết. Chỉ số entropy của ảnh kết quả càng cao thì khả năng là ảnh kết quả bảo toàn tốt tính chi tiết của ảnh gốc.

(iii) Chỉ số đánh giá khách quan fuzzy-entropy được lấy trung bình trên toàn bộ các điểm ảnh và các kênh ảnh, chúng được cho như sau:

Giả sử  $g_k \in [L_{k,\min}, L_{k,\max}] \mapsto \mu(g_k) \in [0, 1]$  là một phép mờ hóa nào đó:

$$H_\mu(I_k) = - \sum_{g=L_{k,\min}}^{L_{k,\max}} (\mu(g) \log_2 \mu(g) + (1 - \mu(g)) \log_2(1 - \mu(g))) * p_k(g) \quad (28)$$

Dưới đây chúng ta sẽ dùng phép mờ hóa tự nhiên:

$$g \mapsto \mu(g) \stackrel{def}{=} \frac{g - L_{k,\min}}{L_{k,\max} - L_{k,\min}} \quad (29)$$

Khi đó ta viết gọn H thay cho  $H_\mu$ , và ta có một độ đo fuzzy-entropy trung bình của K kênh ảnh như sau:

$$H_{avg}(I_{1,K}) = \frac{\sum_{k=1}^K H(I_k)}{K} \quad (30)$$

**Bảng 1.** Bảng kết quả so sánh các chỉ số khách quan giữa thuật toán trong [4] và thuật toán đề xuất

Image	CM <sub>R</sub>	CM <sub>G</sub>		CM <sub>B</sub>		E <sub>avg</sub>		H <sub>avg</sub>		
	[4]	Đề xuất	[4]	Đề xuất	[4]	Đề xuất	[4]	Đề xuất	[4]	Đề xuất
#1	0.1292	<b>0.3067</b>	0.2011	<b>0.4422</b>	0.2550	<b>0.5537</b>	6.0405	<b>6.7621</b>	0.3523	<b>0.4966</b>
#2	0.0166	<b>0.0503</b>	0.0208	<b>0.0982</b>	0.0361	<b>0.0579</b>	7.3196	<b>7.3506</b>	<b>0.8212</b>	0.7707
#3	0.0175	<b>0.0602</b>	0.0209	<b>0.0988</b>	0.0566	<b>0.1491</b>	7.4822	<b>7.6852</b>	<b>0.7999</b>	0.7935
#4	0.0305	<b>0.1002</b>	0.0370	<b>0.1464</b>	0.0598	<b>0.1876</b>	7.4586	<b>7.8066</b>	<b>0.8635</b>	0.7929
#5	0.0179	<b>0.0909</b>	0.0315	<b>0.1741</b>	0.0368	<b>0.1973</b>	7.3038	<b>7.6426</b>	<b>0.8519</b>	0.8419
#6	0.0305	<b>0.0373</b>	0.0338	<b>0.0441</b>	0.0410	<b>0.0548</b>	3.5482	<b>3.7398</b>	0.2850	<b>0.2923</b>

So sánh kết quả thực nghiệm giữa thuật toán của [4] với thuật toán đề xuất áp dụng cho sáu ảnh trong Hình 13



**Hình 14.** Kết quả của [4] cho ảnh #2      **Hình 15.** Kết quả của Hint sử dụng FCM 5 cụm      **Hình 16.** Kết quả sử dụng Curvelet [5]      **Hình 17.** Kết quả sử dụng Hint với FCM 5 cụm

Qua Bảng 1 và Hình 14 - 17 là kết quả thực nghiệm của các ảnh #1 - #6 đã thể hiện các chỉ số khách quan độ tương phản trực tiếp trên từng kênh R, G và B khi sử dụng thuật toán 2 đều cho kết quả cao hơn khi sử dụng thuật toán [4]. Chỉ số khách quan E<sub>avg</sub> khi áp dụng thuật toán 2 cũng cao hơn so với áp dụng thủ tục 1. Cũng vậy, chỉ số khách quan H<sub>avg</sub> khi áp dụng thuật toán 2, ngoài ảnh #1, đều có giá trị nhỏ hơn so với chỉ số ảnh kết quả khi áp dụng thủ tục 1.

## V. KẾT LUẬN

Nâng cao độ tương phản ảnh thường dẫn đến xây dựng một hàm biến đổi giá trị xám có dạng chữ S. Phép lập luận if-then dựa trên tập mờ rất khó đảm bảo hình dạng chữ S của hàm biến đổi mức xám. Phép nâng cao độ tương phản theo hướng tiếp cận trực tiếp của Cheng sẽ tạo ra một hàm biến đổi mức xám dạng chữ S không đối xứng điều này có thể dẫn đến giá trị mức xám biến đổi rơi ra ngoài miền giá trị của độ xám [3].

Bài báo đã khái quát hóa việc xây dựng hàm biến đổi dạng chữ S dựa trên hệ luật mờ bằng việc đề xuất một định nghĩa toán tử mới gọi là HA-Intensification giữa hai đại số gia tử. Đồng thời bài báo cũng đề xuất toán tử Hint (là một toán tử HA-Intensification) áp dụng cho việc nâng cao độ tương phản ảnh đa kênh theo hướng tiếp cận trực tiếp. Hàm biến đổi độ xám có dạng hình chữ S, đối xứng. Mức độ nâng cao tương phản của toán tử Hint đã được chứng minh bằng Toán học là cao hơn mức độ nâng cao tương phản của thuật toán Cheng.

Trong bài báo cũng trình bày thuật toán nâng cao độ tương phản sử dụng FCM và toán tử Hint, thực nghiệm với nhiều loại ảnh đa kênh như các ảnh màu, kênh màu của ảnh viễn thám v.v... đã khẳng định lại kết quả về toán tử Hint trong lý thuyết so với hàm biến đổi chữ S không đối xứng của thuật toán Cheng. Thực nghiệm cho thấy ảnh nâng cao độ tương phản cũng trơn, tăng được độ sáng toàn bộ ảnh (Khắc phục được điểm hạn chế của thuật toán Cheng).

**Lời cảm ơn:** Bài báo nghiên cứu được Quỹ phát triển Khoa học và Công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) tài trợ trong khuôn khổ đề tài mã số 102.01-2017.06.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Balasubramaniam Jayaram, Kakarla V. V. D. L. Narayana, V. Vetrivel, *Fuzzy Inference System based Contrast Enhancement*, Eusflat-lfa 2011.
- [2]. Cat-Ho Nguyen, Witold Pedrycz, Thang Long Duong, Thai Son Tran, *A genetic design of linguistic terms for fuzzy rule based classifiers*. Int. J. Approx. Reasoning 54 (1): 1-21 (2013).
- [3]. Cheng H. D., Huijuan Xu, *A novel fuzzy logic approach to contrast enhancement*, Pattern Recognition 33 (2000) 809-819.
- [4]. Cheng H. D., Mei Xue, Shi X. J., *Contrast enhancement based on a novel homogeneity measurement*, Pattern Recognition 36 (2003) 2687-2697.
- [5]. Jean-Luc Starck, Fionn Murtagh, Emmanuel J. Candès, and David L. Donoho, *Gray and Color Image Contrast Enhancement by the Curvelet Transform*, IEEE Transactions on Image Processing, Vol.12, No.6, June 2003.
- [6]. Hanmandlu M., Devendra Jha, Rochak Sharma, *Color image enhancement by fuzzy intensification*, Pattern Recognition Letters 24 (2003) 81-87.
- [7]. Madasu Hanmandlu, Member, IEEE, and Devendra Jha, *An Optimal Fuzzy System for Color Image Enhancement*, IEEE Transactions on Image Processing, Vol.15, No.10, October 2016.
- [8]. Madasu Hanmandlu, Om Prakash Verma, Nukala Krishna Kumar, and Muralidhar Kulkarni, *A Novel Optimal Fuzzy System for Color Image Enhancement Using Bacterial Foraging*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol.58, No.8, August 2009.
- [9]. Ponomarenko N. Ponomarenko, L. Jin, O. Ieremeiev, V. Lukin, K. Egiazarian, J. Astola, B. Vozel, K. Chehdi, M. Carli, F. Battisti, C. Jay Kuo, "Image database TID2013: Peculiarities, results and perspectives, Signal Processing", *Image Communication*, vol. 30, Jan. (2015):57-77.
- [10]. Nguyễn Văn Quyền, Trần Thái Sơn, Nguyễn Tân Ân, Ngô Hoàng Huy, Đặng Duy An, Một phương pháp mới để nâng cao độ tương phản ảnh màu theo hướng tiếp cận trực tiếp, *Tạp chí Công nghệ Thông tin và Truyền thông*, Tập V-1 số 17(37), 06-2017, trang 59-74.
- [11]. Shen-Chuan Tai, Ting-Chou Tsai, Yi-Ying Chang, Wei-Ting Tsai and Kuang-Hui Tang, *Contrast Enhancement through Clustered Histogram Equalization*, Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology 4(20): 3965-3968, 2012, ISSN: 2040-746.
- [12]. Sudhavani G., Srilakshmi M., Rao P. V., Comparison of Fuzzy Contrast Enhancement Techniques, *International Journal of Computer Applications*, Volume 95– No.22, June 2014, pp.26-31.
- [13]. W. M. Morrow, R. B. Paranjape, R. M. Rangayyan, J. E. L. Desautels, Region-based contrast enhancement of mammograms, *IEEE Trans. Med. Imaging* 11 (3) (1992) 392-405
- [14]. Xu, L., & Jordan, M. I., "On convergence properties of the EM algorithm for Gaussian mixtures", *Neural Computation*, 8(1), (1996):129-151

**PHỤ LỤC**

a.  $\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^m < \frac{1-m\alpha}{1+m\alpha}$  với  $\alpha, m \in (0,1)$ .

Thật vậy: Xét hàm

$$g(\alpha) = 1-\alpha^m(1+m\alpha) - 1+\alpha^m(1-m\alpha) \frac{\partial g}{\partial \alpha} = \alpha+m\alpha \left[ 1+\alpha^{m-1} - 1-\alpha^{m-1} \right] < 0$$

$$g(\alpha) < g(0) = 0 \forall 0 < \alpha < 1, 0 < m < 1$$

Vậy  $\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^m < \frac{1-m\alpha}{1+m\alpha}$

b. Nếu chọn  $\gamma$  sao cho  $\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^\gamma = \frac{1-m\alpha}{1+m\alpha}$  thì  $\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^\gamma > \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^\alpha \rightarrow \gamma < m$

Khi đó  $\forall x, \alpha < x \leq 1$ , ta có

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^\gamma < \frac{1-mx}{1+mx} \forall x, \alpha < x \leq 1 \text{ và } \frac{1-mx}{1+mx} < \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^\gamma < \frac{1-\gamma x}{1+\gamma x} \forall x, 0 < x < \alpha$$

Thật vậy:

Ta chứng minh  $f_1(x) = \frac{\ln \frac{1+mx}{1-mx}}{\ln \frac{1+x}{1-x}}$  là hàm giảm trên  $(0,1)$  khi  $0 < m < 1$ .

Do  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1+mx}{1-mx} = \frac{2m}{1-mx^2}$ ;  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{2}{\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)^2} \frac{1-m^2x^2}{1-x^2} \left\{ m \ln \frac{1+x}{1-x} - 1-m^2x^2 \ln \frac{1+mx}{1-mx} \right\}$$

Xét  $f_2(x) = m \ln \frac{1+x}{1-x} - 1-m^2x^2 \ln \frac{1+mx}{1-mx}$ ,  $f_2(0) = 0$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2mx \left\{ -\ln \frac{1+x}{1-x} + m \ln \frac{1+mx}{1-mx} \right\}$$

Do  $0 < mx < x < 1$ ,  $\ln \frac{1+x}{1-x} > \ln \frac{1+mx}{1-mx} > m \ln \frac{1+mx}{1-mx}$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} < 0 \rightarrow f_2(x) < 0 \forall x \in (0,1) \rightarrow f_1(x) \text{ giảm trên } (0,1) \text{ (đpcm)}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**CONSTRUCT AN S-SHAPED GRAY-SCALE TRANSFORMATION FUNCTION THAT ENHANCES IMAGES CONTRAST USING HEDGE ALGEBRA**

**Nguyen Van Quyen, Tran Thai Son, Nguyen Tan An**

**ABSTRACT:** Image contrast enhancement techniques have two mainly methods: indirect method and direct method. While indirect methods only modify the histogram without defining any specific contrast measure which it only stretches the global distribution of the intensit, the direct methods establish a criterion of contrast measurement and stretches direct each pixel. Among many Cheng and Xu used fuzzy logic to modified the contrast at each point of image. Approaches to use fuzzy logic to enhance image contrast generally result in the constructing an S-shaped gray-scale transformation function. However, fuzzy logic is difficult to construct that function. Cheng's method produces an S-shaped gray-scale transformation function, but it not symmetric which can lead to gray-scale values after the variation that falls outside the gray-area value. Inthis paper, we propose a method for constructing an S-shaped gray-scale transformation function that enhances image contrast in a direct approach based on Hedge Algebra.