Kỷ yếu Hội nghị Quốc gia lần thứ X về Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng Công nghệ thông tin (FAIR), Đà Nẵng, ngày 17-18/08/2017
DOI: 10.15625/vap.2017.00044

LƯỢC ĐỒ SAI PHÂN GIẢI BÀI TOÁN BIÊN CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH VÀ PHI TUYẾN TÍNH CẤP CAO

Vũ Vinh Quang[1], Nguyễn Thanh Hường[2]

[1] Trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông, Đại học Thái Nguyên

[2] Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên

vvquang@ictu.edu.vn, nguyenthanhhuong2806@gmail.com

TÓM TẮT: *Trong bài báo này, chúng tôi sẽ trình bày một số kết quả xác định các công thức tính xấp xỉ các đạo hàm với độ chính xác bậc cao bằng lý thuyết về đa thức nội suy Lagrange. Từ đó, chúng tôi đề xuất việc xây dựng lược đồ sai phân và thuật toán giải số với độ chính xác cao đối với bài toán biên với hệ điều kiện biên hỗn hợp cho phương trình vi phân tuyến tính cấp hai. Từ thuật toán đã xây dựng, bài báo đưa ra một số kết quả đề xuất các sơ đồ lặp giải một số bài toán biên cho phương trình vi phân phi tuyến tính cấp cao. Các kết quả đã được kiểm tra bằng các chương trình thực nghiệm khẳng định tính chính xác của các phương pháp đã đề xuất.*

Từ khóa: *Đa thức nội suy, xấp xỉ đạo hàm, phương pháp số, phương trình vi phân, bài toán biên.*

I. MỞ ĐẦU

Đối với bài toán biên cho phương trình vi phân tuyến tính cấp hai, để tìm nghiệm xấp xỉ người ta thường sử dụng phương pháp lưới chuyển bài toán vi phân về các hệ phương trình sai phân và từ đó sử dụng các thuật toán đã biết để giải các hệ phương trình đại số để thu được nghiệm xấp xỉ của bài toán biên ban đầu. Dễ dàng thấy rằng độ chính xác của nghiệm xấp xỉ thu được sẽ phụ thuộc vào các công thức xấp xỉ các đạo hàm trong phương trình và hệ điều kiện biên để xây dựng lược đồ sai phân. Trong các phương pháp truyền thống [1, 3, 7], bằng các lược đồ sai phân thông thường (độ chính xác cấp một và cấp hai), chúng ta sẽ thu được các lược đồ sai phân với độ chính xác cấp một cho bài toán biên với hệ điều kiện biên hỗn hợp. Hiển nhiên để thu được các lược đồ sai phân với độ chính xác cao hơn chúng ta cần xây dựng các công thức xấp xỉ đạo hàm các cấp với độ chính xác cao, đây chính là hướng cần nghiên cứu. Đối với các phương trình vi phân phi tuyến tính cấp cao, trong các tài liệu [4, 5, 6, 8, 9], các tác giả đã đưa ra một số phương pháp lặp để tìm nghiệm xấp xỉ trong trường hợp điều kiện biên dạng thuần nhất. Việc xây dựng các phương pháp lặp trong trường hợp điều kiện biên hỗn hợp là một hướng nghiên cứu cần quan tâm.

Nội dung chính của bài báo đề xuất một phương pháp xây dựng lược đồ sai phân với độ chính xác cấp bốn đối với bài toán biên cho phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ điều kiện biên hỗn hợp dựa trên các kết quả xấp xỉ đạo hàm với độ chính xác bậc cao. Trên cơ sở kết quả đó, bài báo đề xuất một số sơ đồ lặp tìm nghiệm số cho bài toán biên phi tuyến tính cấp bốn và cấp sáu đối với hệ điều kiện biên hỗn hợp. Cấu trúc của bài báo gồm: Mục 1 giới thiệu nội dung nghiên cứu, mục 2 giới thiệu về phương pháp xác định các công thức xấp xỉ đạo hàm với độ chính xác bậc cao, mục 3 đề xuất lược đồ sai phân mới giải bài toán cấp hai với độ chính xác bậc cao, mục 4 giới thiệu các kết quả đề xuất các sơ đồ lặp tìm nghiệm số đối với các bài toán biên cho phương trình vi phân phi tuyến cấp bốn và cấp sáu.

II. BÀI TOÁN XẤP XỈ ĐẠO HÀM VỚI ĐỘ CHÍNH XÁC BẬC CAO

A. Lý thuyết về đa thức nội suy

Chúng ta xét bài toán tổng quát: cho hàm số $y = f(x),\ x \in [a,b]$, cho trước $(n+1)$ mốc nội suy $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Hãy tìm đa thức $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$ thỏa mãn tính chất:

$$P_n(x_i) = y_i = f(x_i) \ \ (i = 0,1,2,...,n).$$

Ý nghĩa hình học của bài toán nội suy là: hãy xây dựng đường cong đại số $y = P_n(x)$ đi qua tất cả các điểm cho trước (x_i, y_i) $(i = 0,1,2,...,n)$. Về mặt toán học đã chứng minh [1]: với hàm số $f(x)$ xác định liên tục và các mốc nội suy tùy ý thì đa thức nội suy $P_n(x)$ sẽ tồn tại và duy nhất. Bằng các kiến thức toán học cơ bản [1], chúng ta nhận được công thức xác định đa thức nội suy Lagrange

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x), \tag{1}$$

ở đây $L_k(x), k = 0,1,2,...,n$ là các nhân tử Lagrange được xác định bằng công thức

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}, \ k = 0,1,2,...,n.$$

Sai số của phương pháp xấp xỉ được xác định bằng công thức

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \text{ trong đó } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

Trong trường hợp lưới cách đều, kí hiệu $h = (b-a)/n,$ chúng ta có thể đánh giá sai số của phép nội suy theo công thức $f(x) = P_n(x) + o(h^{n+1}).$

B. Bài toán xấp xỉ đạo hàm

Chúng ta giả thiết hàm số $f(x)$ là hàm khả vi mọi cấp trên đoạn $[a,b]$. Sử dụng lưới sai phân đều với bước lưới $h = (b-a)/n$, ta chia đoạn $[a,b]$ bằng các mốc nội suy $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b,$ trong đó $x_i = a + ih, \ i = 0,1,...,n.$ Xuất phát từ công thức về đa thức nội suy Lagrange, ta sẽ thu được các công thức tính xấp xỉ đạo hàm như sau:

$$f'(x) = P_n'(x) + R_n'(x) = P_n'(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right) = P_n'(x) + o(h^n),$$
$$f''(x) = P_n''(x) + R_n''(x) = P_n''(x) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right) = P_n''(x) + o(h^{n-1}), \ ...$$

Như vậy thông qua việc xác định đa thức nội suy cùng các đạo hàm của đa thức, chúng ta có thể xây dựng được các công thức xấp xỉ đạo hàm các cấp với độ chính xác bậc cao.

C. Một số kết quả trong trường hợp lưới năm điểm

Giả sử xét lưới năm điểm x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 cách đều. Kí hiệu $f_k = f(x_k) = f(x_0 + kh), \ k = 0,1,2,3,4.$ Ta xác định các nhân tử Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{24h^4}; \ L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{-6h^4};$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{4h^4}; \ L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{-6h^4};$$

$$L_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{24h^4}.$$

Vậy theo (1)

$$\begin{aligned} P_4(x) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{24h^4}f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{-6h^4}f_1 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{4h^4}f_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{-6h^4}f_3 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{24h^4}f_4. \end{aligned}$$

Xét tại điểm $x = x_0,$ chúng ta có

$$f'(x_0) = f_0L_0'(x_0) + f_1L_1'(x_0) + f_2L_2'(x_0) + f_3L_3'(x_0) + f_4L_4'(x_0) + o(h^4),$$
$$f''(x_0) = f_0L_0''(x_0) + f_1L_1''(x_0) + f_2L_2''(x_0) + f_3L_3''(x_0) + f_4L_4''(x_0) + o(h^3).$$

Vì

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{24h^4} \Rightarrow L_0'(x_0) = -\frac{25}{12h}; \ L_0''(x_0) = \frac{35}{12h^2};$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{-6h^4} \Rightarrow L_1'(x_0) = \frac{48}{12h}; \ L_1''(x_0) = -\frac{104}{12h^2};$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{4h^4}\Rightarrow L_2'(x_0)=\frac{36}{12h};\; L_2''(x_0)=\frac{114}{12h^2};$$
$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{-6h^4}\Rightarrow L_3'(x_0)=\frac{16}{12h};\; L_3''(x_0)=-\frac{56}{12h^2};$$
$$L_4(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{24h^4}\Rightarrow L_4'(x_0)=-\frac{3}{12h};\; L_4''(x_0)=\frac{11}{12h^2}.$$

Từ đó chúng ta thu được công thức

$$\begin{cases} f'(x_0)=\dfrac{1}{12h}\; -25f_0+48f_1-36f_2+16f_3-3f_4\; +o(h^4),\\ f''(x_0)=\dfrac{1}{12h^2}\; 35f_0-104f_1+114f_2-56f_3+11f_4\; +o(h^3). \end{cases} \tag{2}$$

Hoàn toàn tương tự, lần lượt xét tại các mốc nội suy x, x_1, x_2, x_3, x_4, ta sẽ thu được các công thức tương ứng

$$\begin{cases} f'(x_1)=\dfrac{1}{12h}\; -3f_0-10f_1+18f_2-6f_3+f_4\; +o(h^4),\\ f'(x_2)=\dfrac{1}{12h}\; -f_0-8f_1+8f_3-f_4\; +o(h^4),\\ f'(x_3)=\dfrac{1}{12h}\; -f_0+6f_1-18f_2+10f_3+3f_4\; +o(h^4),\\ f'(x_4)=\dfrac{1}{12h}\; 3f_0-16f_1+36f_2-48f_3+25f_4\; +o(h^4), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} f''(x_1)=\dfrac{1}{12h^2}\; 11f_0-20f_1+6f_2+4f_3-f_4\; +o(h^3),\\ f''(x_2)=\dfrac{1}{12h^2}\; -f_0+16f_1-30f_2+16f_3-f_4\; +o(h^3),\\ f''(x_3)=\dfrac{1}{12h^2}\; -f_0+4f_1+6f_2-20f_3+11f_4\; +o(h^3),\\ f''(x_4)=\dfrac{1}{12h^2}\; 11f_0-56f_1+114f_2-104f_3+35f_4\; +o(h^3). \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} f^{(4)}(x_0)=\dfrac{1}{h^4}\; f_0-4f_1+6f_2-4f_3+f_4\; +o(h),\\ f^{(4)}(x_1)=\dfrac{1}{h^4}\; f_0-4f_1+6f_2-4f_3+f_4\; +o(h),\\ f^{(4)}(x_2)=\dfrac{1}{h^4}\; f_0-4f_1+6f_2-4f_3+f_4\; +o(h),\\ f^{(4)}(x_3)=\dfrac{1}{h^4}\; f_0-4f_1+6f_2-4f_3+f_4\; +o(h),\\ f^{(4)}(x_4)=\dfrac{1}{h^4}\; f_0-4f_1+6f_2-4f_3+f_4\; +o(h). \end{cases} \tag{5}$$

Nhận xét:

- Bộ công thức (2)-(5) cho ta các kết quả tính gần đúng đạo hàm các cấp với độ chính xác cấp bốn, cấp ba và cấp một tương ứng thông qua việc áp dụng đa thức nội suy Lagrange với số nút năm điểm. Các kết quả này trùng với các kết quả mà tác giả J. Li đã công bố trong [6].
- Trong ứng dụng tính toán, các mốc nội suy x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 được hiểu tổng quát là năm mốc liên tiếp trong lưới sai phân $(n+1)$, đó là các mốc $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4}$, $k+4<n$. Các công thức trên có ý nghĩa rất quan trọng trong việc xây dựng các lược đồ sai phân giải phương trình vi phân với độ chính xác bậc cao.

III. KẾT QUẢ XÂY DỰNG LƯỢC ĐỒ SAI PHÂN ĐỐI VỚI BÀI TOÁN BIÊN CẤP HAI

1. Mô hình bài toán: Xét bài toán biên

$$\begin{cases} u'' = f(x), \ \ x \in [a,b], \\ c_0 u(a) - c_1 u'(a) = C, \\ d_0 u(b) + d_1 u'(b) = D, \end{cases} \tag{6}$$

trong đó $c_0, c_1, d_0, d_1 \geq 0,\ c_0^2 + c_1^2 > 0,\ d_0^2 + d_1^2 > 0$ là các hằng số tùy ý. Chia đoạn $\left[a,b\right]$ bằng $(n+1)$ điểm chia với bước lưới $h = (b-a)/n,\ x_i = a + ih\ (i = 0,1,...,n)$. Kí hiệu $u_i = u(x_i),\ u_i' = u'(x_i),\ u_i'' = u''(x_i)$.

Trên cơ sở các công thức xấp xỉ đạo hàm với độ chính xác cấp một và cấp hai, trong [1, 3] đã đưa ra phương pháp xây dựng lược đồ sai phân tìm nghiệm số của bài toán (6) với độ chính xác cấp một. Hệ phương trình sai phân giải được bằng thuật toán truy đuổi ba đường chéo với độ phức tạp tính toán $o(n)$. Trên cơ sở các công thức xấp xỉ đạo hàm với độ chính xác bậc cao, chúng tôi sẽ đưa ra phương pháp xây dựng lược đồ sai phân mới tìm nghiệm số của bài toán (6). Đây là kết quả mới có độ chính xác cao hơn so với các lược đồ sai phân đã biết.

Xét công thức khai triển Taylor tổng quát

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu' + \frac{h^2}{2} u'' \pm \frac{h^3}{6} u^{(3)} + \frac{h^{(4)}}{24} u^{(4)} + ... + o(h^n),$$

hay

$$u_{i+1} = u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2} u_i'' + \frac{h^3}{6} u_i^{(3)} + \frac{h^4}{24} f_i'' + \frac{h^5}{120} u_i^{(5)} + \frac{h^6}{720} f_i^{(4)} + o(h^6),$$
$$u_{i-1} = u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2} u_i'' - \frac{h^3}{6} u_i^{(3)} + \frac{h^4}{24} f_i'' - \frac{h^5}{120} u_i^{(5)} + \frac{h^6}{720} f_i^{(4)} + o(h^6).$$

Từ đây suy ra

$$u_i'' = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} f_i'' - \frac{h^4}{360} f_i^{(4)} + o(h^4).$$

Vậy ta thu được lược đồ sai phân với độ chính xác cấp bốn

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f_i + \frac{h^2}{12} f_i'' + \frac{h^4}{360} f_i^{(4)};\ i = 1,2,...,n-1.$$

Sử dụng các công thức tính xấp xỉ đạo hàm với độ chính xác bậc cao (2)-(5), áp dụng với các đạo hàm tương ứng trong phương trình và điều kiện biên, ta thu được hệ phương trình sai phân với độ chính xác cấp bốn như sau:

$$\begin{cases} c_0 u_0 - \dfrac{c_1}{12h} \ -25u_0 + 48u_1 - 36u_2 + 16u_3 - 3u_4 \ = C, \\ u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = F_i;\ i = 1,2,...,n-1, \\ d_0 u_n + \dfrac{d_1}{12h} \ 25u_n - 48u_{n-1} + 36u_{n-2} - 16u_{n-3} + 3u_{n-4} \ = D, \end{cases}$$

trong đó

$$F_i = h^2 \left(f_i + \frac{h^2}{12} f_i'' + \frac{h^4}{360} f_i^{(4)} \right);\ i = 1,2,...,n-1.$$

Hệ có dạng thu gọn

$$AU = F, \tag{7}$$

ở đây $U = \ u_0, u_1, ..., u_n \ ^T;\ F = \ F_0, F_1, ..., F_n \ ^T$, ma trận hệ số của hệ được kí hiệu

$$A=\begin{pmatrix}
a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} & a_{0,4} & 0 & & & & \\
a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & & & & \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & & & & \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & & & & \\
 & & & & & a_{n-3,n-4} & a_{n-3,n-3} & a_{n-3,n-2} & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
 & & & & & a_{n,n-4} & a_{n,n-3} & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n}
\end{pmatrix}.$$

2. Nhận xét:

- Hệ phương trình sai phân (7) chính là hệ phương trình sai phân tương ứng với bài toán biên cho phương trình vi phân (6) với độ chính xác cấp bốn.
- Trong trường hợp khi điều kiện biên có dạng Dirichlet $u(a) = C;\ u(b) = D,$ ta thu được lược đồ sai phân với đội chính xác cấp sáu (do không phải sai phân điều kiện biên).
- Ma trận A của hệ phương trình không phải dạng ba đường chéo có tính chất chéo trội, do đó hệ không giải được bằng thuật toán truy đuổi.

3. Bổ đề

Hệ phương trình $AU = F$ qua hữu hạn phép toán biến đổi luôn chuyển hệ về dạng ba đường chéo có tính chất chéo trội.

Chúng ta cần chứng minh hai vấn đề:

+ Hệ phương trình qua hữu hạn phép toán được chuyển về hệ đại số tuyến tính dạng ba đường chéo.

+ Ma trận của hệ có tính chất chéo trội.

Chứng minh: Theo tính chất của hệ đại số tuyến tính, hệ sẽ không thay đổi nếu ta nhân một phương trình với một số bất kì sau đó cộng vào phương trình khác. Sử dụng tính chất trên, ta sẽ biến đổi hệ phương trình (7) về dạng hệ phương trình có ma trận ba đường chéo lần lượt qua các bước như sau:

Bước 1: Nhân phương trình thứ tư với số $K_1 = -a_{0,4} / a_{3,4}$ sau đó cộng vào phương trình thứ nhất của hệ. Qua phép biến đổi ta thu được $a_{0,4} = 0.$ Hoàn toàn tương tự, nhân phương trình thứ $n-2$ với số $K_2 = -a_{n,n-4} / a_{n-3,n-4}$ sau đó cộng vào phương trình thứ $n+1$ của hệ. Qua phép biến đổi ta thu được $a_{n,n-4} = 0.$

Bước 2: Biến đổi tương tự, ta thu được $a_{0,3} = 0;\ a_{n,n-3} = 0.$

Bước 3: Biến đổi tương tự, ta thu được $a_{0,2} = 0;\ a_{n,n-2} = 0.$

Trong các phép biến đổi trên, các thành phần $F_0,\ F_n$ cũng nhận được giá trị thay đổi theo từng bước biến đổi. Cuối cùng, sau ba bước biến đổi, ta nhận được hệ phương trình tương đương trong đó ma trận của hệ có dạng ba đường chéo với các số hạng được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_{0,0} = c_0 + \dfrac{c_1}{h};\ a_{0,1} = -\dfrac{c_1}{h}; \\ a_{i,i-1} = 1;\ a_{i,i} = -2; a_{i,i+1} = 1;\ i = 1,2,...,n-1, \\ a_{n,n-1} = \dfrac{d_1}{h};\ a_{n,n} = d_0 + \dfrac{d_1}{h}. \end{cases}$$

Do điều kiện $c_0,\ c_1 > 0,\ d_0,\ d_1 \ge 0,$ do đó các hệ số của hệ thỏa mãn tính chất

$$\left|a_{0,0}\right| > \left|a_{0,1}\right|,\ \left|a_{n,n}\right| > \left|a_{n,n-1}\right|,\ \left|a_{i,i}\right| = \left|a_{i,i-1}\right| + \left|a_{i,i+1}\right|,\ \forall i = 1,2,...,n-1,$$

tức là hệ thu được là hệ phương trình đại số dạng ba đường chéo có tính chất chéo trội, nghiệm của hệ tìm được bằng thuật toán truy đuổi với độ phức tạp $o(n)$.

4. Một số kết quả tính toán

Để kiểm tra độ chính xác của lược đồ đã xây dựng, chúng ta kí hiệu u_d là nghiệm đúng của bài toán, u là nghiệm xấp xỉ thu được khi giải hệ phương trình sai phân, $\varepsilon = \left\|u_d - u\right\|_\infty$ là sai số giữa nghiệm đúng và nghiệm xấp xỉ trên toàn lưới sai phân, sử dụng thuật toán truy đuổi ba đường chéo giải hệ phương trình sai phân. Kết quả kiểm tra độ chính xác của lược đồ được đưa ra trong các Bảng 1 và Bảng 2.

Bảng 1. Giá trị sai số ε trên từng lưới điểm $c_0 = 1;\ c_1 = 2;\ d_0 = 2;\ d_1 = 3$

Hàm nghiệm đúng	10	100	1000
$\sin x + \cos x$	1.1×e-5	1.4×e-9	9.0×e-13
e^{-x}	8.0×e-6	1.0×e-9	3.1×e-13
$e^x + x^4 + \cos x$	1.0×e-5	1.7×e-9	2.0×e-12

Bảng 2.

Bảng 3. Giá trị sai số ε trên từng lưới điểm $c_0 = 1;\ c_1 = 0;\ d_0 = 1;\ d_1 = 0$

Hàm nghiệm đúng	10	100	1000
$\sin x + \cos x$	1.0×e-9	2.1×e-14	3.1×e-18
e^{-x}	2.0×e-10	1.0×e-14	1.0×e-18
$e^x + x^4 + \cos x$	2.0×e-10	8.0×e-15	8.0×e-19

Các kết quả Bảng 1 chỉ ra rằng độ chính xác của phương pháp là tương đương với $o(h^4)$. Khi lựa chọn $c_1 = d_1 = 0$ (Bảng 2) thì độ chính xác là tương đương với $o(h^6)$.

Kết luận: Bài toán biên cho phương trình vi phân cấp hai luôn luôn tìm được nghiệm xấp xỉ với độ chính xác cấp bốn bằng thuật toán truy đuổi ba đường chéo với độ phức tạp tính toán $o(n)$.

IV. MỘT SỐ KẾT QUẢ XÂY DỰNG SƠ ĐỒ LẶP GIẢI BÀI TOÁN BIÊN PHI TUYẾN BẬC CAO

A. Sơ đồ lặp giải số phương trình vi phân phi tuyến cấp bốn tổng quát

1. Đặt vấn đề: Chúng ta xét một số dạng bài toán biên phi tuyến tính cấp bốn

$$\begin{cases} u^{(4)} = f(x,u,u^{(2)}),\ x \in \ 0,1\ , \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} u^{(4)} = f(x,u,u',u^{(2)},u^{(3)}),\ x \in \ 0,1\ , \\ u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} u^{(4)} = f(x,u,u',u^{(2)},u^{(3)}),\ x \in \ 0,1\ , \\ u(0) = u'(1) = 0, \alpha_0 u''(0) - \alpha_1 u'''(0) = 0, \beta_0 u''(1) + \beta_1 u'''(1) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Đây là các bài toán biên phi tuyến tính cấp bốn với các hệ điều kiện biên dạng thuần nhất. Đối với bài toán (8) và (9), dựa trên tư tưởng xây dựng phương pháp lặp toán tử kết hợp với phương pháp phân rã về hai bài toán biên cấp hai, trong tài liệu [8, 9], các tác giả đã đưa ra các phương pháp lặp tìm nghiệm xấp xỉ của các bài toán. Việc chứng minh sự hội tụ của các sơ đồ lặp đã được thực hiện. Đối với bài toán (10), trong [4], các tác giả đã chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán, tuy nhiên chưa chỉ ra phương pháp xác định nghiệm xấp xỉ của bài toán. Như vậy có thể thấy trong trường hợp tổng quát với hệ điều kiện biên đầy đủ, việc xây dựng phương pháp lặp xác định nghiệm xấp xỉ là một hướng nghiên cứu cần quan tâm. Trong phần này, phát triển các phương pháp lặp đã được đưa ra trong [8, 9] kết hợp với lược đồ sai phân mới đề xuất, chúng tôi đề xuất một số sơ đồ lặp tìm nghiệm xấp xỉ trong trường hợp khi hệ điều kiện biên đầy đủ.

2. Mô hình bài toán: Chúng ta xét mô hình bài toán phi tuyến cấp bốn với hệ điều kiện biên đầy đủ

$$\begin{cases} u^{(4)} = f(x,u,u',u^{(2)},u^{(3)}),\ x \in \ a,b\ , \\ a_0 u(a) - a_1 u'(a) = A,\ \ b_0 u(b) + b_1 u'(b) = B, \\ c_0 u^{(2)}(a) - c_1 u^{(3)}(a) = C,\ \ d_0 u^{(2)}(b) + d_1 u^{(3)}(b) = D. \end{cases}$$

Đặt $v = u^{(2)},\ \varphi = f(x,u,u',u^{(2)},u^{(3)})$. Khi đó qua phương pháp phân rã, bài toán cấp bốn được đưa về hai bài toán cấp hai như sau:

$$\begin{cases} v'' = \varphi,\ x \in \ a,b\ , \\ c_0 v(a) - c_1 v'(a) = C, \\ d_0 v(b) + d_1 v'(b) = D, \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' = v,\ x \in \ a,b\ , \\ a_0 u(a) - a_1 u'(a) = A, \\ b_0 u(b) + b_1 u'(b) = B. \end{cases} \tag{11}$$

Hiển nhiên các bài toán cấp hai (11) sẽ luôn thu được nghiệm xấp xỉ thông qua lược đồ sai phân với độ chính xác $o(h^4)$. Điểm mấu chốt là chúng ta cần xác định được giá trị hàm φ.

3. Xây dựng sơ đồ lặp

Xuất phát từ hai bài toán (11), chúng ta dễ dàng thu được các phụ thuộc $v = v(\varphi),\ u = u(\varphi)$. Từ đó ta cũng có các phụ thuộc $u' = u'(\varphi),\ u^{(2)} = u^{(2)}(\varphi),\ u^{(3)} = u^{(3)}(\varphi)$. Vì vậy từ phép đặt $\varphi = f(x,u,u',u^{(2)},u^{(3)})$ suy ra

$\varphi = f(x, u(\varphi), u'(\varphi), u^{(2)}(\varphi),\ u^{(3)}(\varphi)) = F(x,\varphi)$. Như vậy ta thu được phương trình toán tử $\varphi = F(x,\varphi)$. Trên cơ sở của phương trình toán tử, ta có thể đề xuất phương pháp lặp xác định hàm φ bằng thuật toán sau đây:

Thuật toán QH_PT_1

Bước 1: (Bước khởi động): Cho xấp xỉ ban đầu $\varphi_0 = f(x,0,0,0,0)$, err là vô cùng bé cho trước, $k := 0$.

Bước 2: (Bước lặp)

Bước 2.1: Giải lần lượt các bài toán

$$\begin{cases} v_k'' = \varphi_k,\ x \in (a,b), \\ c_0 v_k(a) - c_1 v_k'(a) = C, \\ d_0 v_k(a) + d_1 v_k'(a) = D. \end{cases} \qquad \begin{cases} u_k'' = v_k,\ x \in (a,b), \\ a_0 u_k(a) - a_1 u_k'(a) = A, \\ b_0 u_k(a) + b_1 u_k'(a) = B. \end{cases}$$

Bước 2.2: Hiệu chỉnh $\varphi_{k+1}(x) = f(x, u_k(x), u_k'(x), v_k(x), v_k'(x))$.

$k := k+1$. Quay về bước 2.

Điều kiện dừng lặp của thuật toán là $\left\| u_{k+1} - u_k \right\|_\infty \le err$ hoặc $\left\| u_d - u_k \right\|_\infty \le err$, ở đây u_d là nghiệm đúng của bài toán còn u_k là nghiệm xấp xỉ tại bước lặp thứ k.

Nhận xét:

- Sự hội tụ của phương pháp hoàn toàn phụ thuộc vào sự hội tụ của dãy lặp $\varphi_{k+1} = F(x, \varphi_k)$. Tùy thuộc vào tính chất của toán tử *F*, ta có thể khẳng định sự hội tụ của dãy lặp. Việc chứng minh bằng lý thuyết là chưa thực hiện được, tuy nhiên chúng ta có thể kiểm tra tính hội tụ thông qua các kết quả thực nghiệm.
- Việc tính xấp xỉ giá trị $\varphi_{k+1}(x) = f(x, u_k(x), u_k'(x), v_k(x), v_k'(x))$ cũng được sử dụng các công thức xấp xỉ đạo hàm $u'(x),\ v'(x)$ với độ chính xác bậc bốn. Các bài toán vi phân cấp hai cũng giải được bằng thuật toán sai phân với độ chính xác cấp bốn, do đó chúng ta có thể khẳng định nghiệm thu được cũng đạt được với độ chính xác cấp bốn.

4. Một số ví dụ

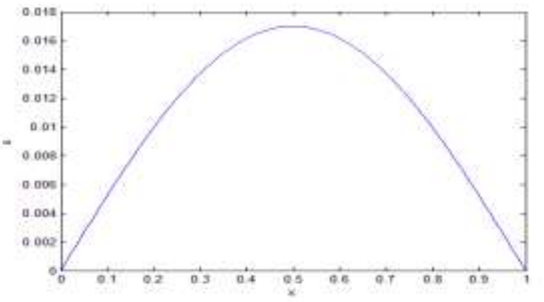
Bài toán 1: Xét bài toán

$$\begin{cases} u^{(4)} = -5u^{(2)} - (u+1)^2 + \sin^2 \pi x + 1,\ x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0,\ u''(0) = u''(1) = 0. \end{cases}$$

Bài toán này đã được các tác giả Z. Bai, W. Ge, Y. Wang đưa ra trong [2]. Trong bài báo này, các tác giả đã chỉ ra phương pháp xây dựng dãy lặp đơn điệu để xác định nghiệm gần đúng của bài toán, tuy nhiên các tác giả cũng chưa chỉ ra nghiệm xấp xỉ cụ thể của bài toán. Ta sẽ sử dụng phương pháp lặp đã đề xuất để chỉ ra nghiệm gần đúng của bài toán. Cần chú ý rằng trong trường hợp này chúng ta không cần sử dụng công thức sai phân đạo hàm bậc nhất với độ chính xác cấp bốn nên độ chính xác của phương pháp là tương đương với $o(h^6)$. Kí hiệu k là số bước lặp, $\varepsilon = \left\| u_{k+1} - u_k \right\|_\infty$ là sai số giữa hai bước lặp liên tiếp, n là số điểm lưới. Ta nhận được một số kết quả sau đây:

Bảng 4. Số bước lặp, sai số tương đối trên lưới $n = 100$

k	ε	k	ε
5	4.0×e-4	30	7.0×e-12
10	1.0×e-5	35	1.0×e-13
15	3.0×e-7	40	5.0×e-15
20	9.0×e-9	45	1.0×e-16
25	2.0×e-10	50	1.0×e-19



Hình 1. Đồ thị nghiệm xấp xỉ

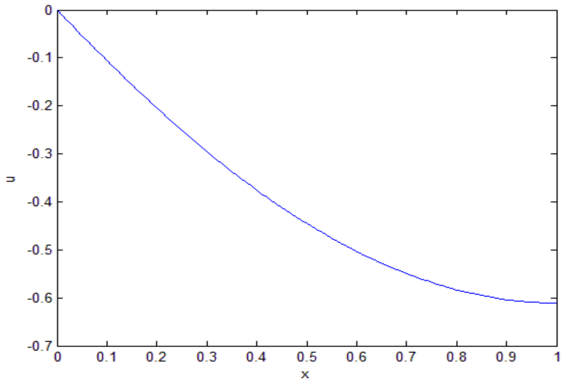
Bài toán 2: Xét bài toán

$$\begin{cases} u^{(4)} + u^2 + (4+t^2)u' - tu^{(2)} - u^{(2)}\sin u^{(3)} = 0, \ t \in (0,1), \\ u(0) = u'(1) = 0, \ 2u^{(2)}(0) - u^{(3)}(0) = \phi_1, \ u^{(2)}(1) + u^{(3)}(1) = \phi_2. \end{cases}$$

Dạng bài toán trên đã được các tác giả H. Feng, D. Ji và Weigao đưa ra trong [4]. Trong trường hợp hệ điều kiện biên là thuần nhất $(\phi_1 = \phi_2 = 0)$, các tác giả đã chứng minh sự tồn tại nghiệm nhưng chưa chỉ ra phương pháp xác định nghiệm gần đúng bài toán. Sử dụng thuật toán đã đề xuất, chúng ta sẽ tìm nghiệm xấp xỉ trong trường hợp điều kiện biên là không thuần nhất $(\phi_1^2 + \phi_2^2 > 0)$. Kí hiệu k là số bước lặp của sơ đồ, $\varepsilon = \|u_{k+1} - u_k\|_\infty$, qua thực nghiệm ta nhận được các kết quả như sau:

Bảng 5. Số bước lặp, sai số ε trên lưới $n = 100$, $\phi_1 = -1$, $\phi_2 = 2$

k	ε	k	ε
20	1.4×e-5	45	1.0×e-10
25	1.3×e-6	50	9.0×e-12
30	1.2×e-7	55	8.0×e-13
35	1.1×e-8	60	7.0×e-15
40	1.0×e-9	65	7.0×e-16



Hình 2. Đồ thị nghiệm xấp xỉ

Bài toán 3: Xét bài toán

$$\begin{cases} u^{(4)} = \sin(\pi t) + \dfrac{\cos \pi t}{\pi} - \dfrac{(\cos \pi t)^2}{\pi^4} - \sin(-\dfrac{\sin \pi t}{\pi^2}) + (u')^2 + \sin(u^{(2)}) + u^{(3)}, \ t \in (0,1), \\ u(0) - u'(0) = -\dfrac{1}{\pi^3}, \ u(1) + 2u'(1) = -\dfrac{2}{\pi^3}, \ 2u^{(2)}(0) - u^{(3)}(0) = \dfrac{1}{\pi}, \ u^{(2)}(1) + u^{(3)}(1) = \dfrac{1}{\pi}. \end{cases}$$

Đây là bài toán phi tuyến với điều kiện biên hỗn hợp. Có thể kiểm tra bài toán trên có nghiệm đúng là $u_d = \sin(\pi t) / \pi^4$. Sử dụng thuật toán đã đề xuất, kí hiệu k là số bước lặp của sơ đồ, $\varepsilon = \|u_d - u\|_\infty$, ta thu được các kết quả như sau:

Bảng 6. Số bước lặp, sai số ε trên lưới $n = 1000$

k	ε	k	ε
2	0.0322	16	$1.0\times$e-8
4	0.0037	18	$2.0\times$e-9
6	$4.0\times$e-4	20	$2.0\times$e-10
8	$6.0\times$e-5	22	$3.0\times$e-11
10	$7.0\times$e-6	24	$7.0\times$e-12
12	$9.0\times$e-7	26	$3.0\times$e-12
14	$1.0\times$e-7	28	$1.0\times$e-12

Nhận xét: Qua các kết quả thực nghiệm, chúng ta có thể thấy rằng thuật toán QH_PT_1 đề xuất là hội tụ, độ chính xác của thuật toán là tương đương với $o(h^4)$.

B. Sơ đồ lặp giải số phương trình vi phân phi tuyến cấp sáu tổng quát

Phát triển các kết quả đã đạt được khi đề xuất các sơ đồ lặp tìm nghiệm số đối với bài toán biên phi tuyến cấp bốn tổng quát, trong phần này chúng tôi sẽ đề xuất các sơ đồ lặp tìm nghiệm số đối với bài toán biên phi tuyến cấp sáu tổng quát.

1. Mô hình bài toán: Xét mô hình bài toán phi tuyến cấp sáu với hệ điều kiện biên đầy đủ

$$\begin{cases} u^{(6)} = f(x,u,u',u^{(2)},u^{(3)},u^{(4)},u^{(5)}),\ x \in a,b\ , \\ a_0u(a) - a_1u'(a) = A, \qquad b_0u(b) + b_1u'(b) = B, \\ c_0u^{(2)}(a) - c_1u^{(3)}(a) = C, \quad d_0u^{(2)}(b) + d_1u^{(3)}(b) = D, \\ e_0u^{(4)}(a) - e_1u^{(5)}(a) = E, \quad f_0u^{(4)}(b) + f_1u^{(5)}(b) = F. \end{cases}$$

Đặt $\mathrm{w} = u^{(4)},\ v = u^{(2)},\ \varphi = f(x,u,u',u^{(2)},u^{(3)},u^{(4)},u^{(5)})$. Khi đó qua phương pháp phân rã, bài toán cấp sáu được đưa về ba bài toán cấp hai như sau:

$$\begin{cases} \mathrm{w}^{(2)} = \varphi,\ x \in a,b\ , \\ e_0\mathrm{w}(a) - e_1\mathrm{w}'(a) = E, \\ f_0\mathrm{w}(b) + f_1\mathrm{w}'(b) = F, \end{cases} \quad \begin{cases} v^{(2)} = \mathrm{w},\ x \in a,b\ , \\ c_0v(a) - c_1v'(a) = C, \\ d_0v(b) + d_1v'(b) = D, \end{cases} \quad \begin{cases} u^{(2)} = v,\ x \in a,b\ , \\ a_0u(a) - a_1u'(a) = A, \\ b_0u(b) + b_1u'(b) = B. \end{cases} \tag{12}$$

Hiển nhiên các bài toán (12) sẽ luôn giải được bằng lược đồ sai phân với độ chính xác bậc cao đã được đưa ra trong bài toán cấp hai. Điểm mấu chốt là chúng ta cần xác định được giá trị hàm φ.

2. Xây dựng sơ đồ lặp

Xuất phát từ ba bài toán (12), chúng ta thu được các phụ thuộc

$$\mathrm{w} = \mathrm{w}(\varphi),\ v = v(\varphi),\ u = u(\varphi).$$

Từ đó, ta cũng có các phụ thuộc hàm

$$u' = u'(\varphi),\ v = v(\varphi),\ v' = v'(\varphi),\ \mathrm{w} = \mathrm{w}(\varphi),\ \mathrm{w}' = \mathrm{w}'(\varphi).$$

Vì vậy từ phép đặt $\varphi = f(x,u,u',v,v',\mathrm{w},\mathrm{w}')$ suy ra $\varphi = F(x,\varphi)$. Như vậy ta thu được phương trình toán tử $\varphi = F(x,\varphi)$. Trên cơ sở của phương trình toán tử, ta có thể xây dựng phương pháp lặp xác định hàm φ bằng thuật toán sau đây:

Thuật toán QH_PT_2

Bước 1: (Bước khởi động): Cho xấp xỉ ban đầu $\varphi_0 = f(x,0,0,0,0,0,0)$, err là vô cùng bé cho trước, $k := 0$.

Bước 2: (Bước lặp)

Bước 2.1: Giải lần lượt các bài toán

$$\begin{cases} \mathrm{w}_k^{''} = \varphi_k, \ a < x < b, \\ e_0 \mathrm{w}_k(a) - e_1 \mathrm{w}_k^{'}(a) = E, \\ f_0 \mathrm{w}_k(a) + f_1 \mathrm{w}_k^{'}(a) = F. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_k^{''} = \mathrm{w}_k, \ a < x < b, \\ c_0 v_k(a) - c_1 v_k^{'}(a) = C, \\ d_0 v_k(a) + d_1 v_k^{'}(a) = D. \end{cases} \qquad \begin{cases} u_k^{''} = v_k, \ a < x < b, \\ a_0 u_k(a) - a_1 u_k^{'}(a) = A, \\ b_0 u_k(a) + b_1 u_k^{'}(a) = B. \end{cases}$$

Bước 2.2: Hiệu chỉnh $\varphi_{k+1}(x) = f(x, u_k(x), u_k^{'}(x), v_k(x), v_k^{'}(x), \mathrm{w}_k(x), \mathrm{w}_k^{'}(x)).$

$k := k+1.$ Quay về bước 2.

Điều kiện dừng lặp của thuật toán là $\left\| u_{k+1} - u_k \right\|_\infty \le err$ hoặc $\left\| u_d - u_k \right\|_\infty \le err,$ ở đây u_d là nghiệm đúng của bài toán còn u_k là nghiệm xấp xỉ tại bước lặp thứ k.

Nhận xét:

- Sự hội tụ của phương pháp hoàn toàn phụ thuộc vào sự hội tụ của dãy lặp $\varphi_{k+1} = F(x, \varphi_k).$ Bằng lý thuyết về các sơ đồ lặp ta có thể chứng minh sự hội tụ của dãy lặp tùy thuộc vào tính chất của toán tử $F.$ Việc chứng minh bằng lý thuyết là chưa thực hiện được, tuy nhiên chúng ta có thể kiểm tra tính hội tụ của sơ đồ lặp thông qua các kết quả thực nghiệm.
- Việc tính xấp xỉ giá trị $\varphi_{k+1}(x) = f(x, u_k, u_k^{'}, v_k, v_k^{'}, \mathrm{w}_k, \mathrm{w}_k^{'})$ cũng được sử dụng các công thức xấp xỉ đạo hàm $u'(x),\ v'(x),\ \mathrm{w}'(x)$ với độ chính xác bậc bốn. Các bài toán vi phân cấp hai cũng giải được bằng thuật toán sai phân với độ chính xác cấp bốn. Do đó chúng ta có thể khẳng định nghiệm thu được cũng đạt được với độ chính xác cấp bốn.

3. Một số kết quả thực nghiệm

Bài toán 4: Xét bài toán

$$\begin{cases} u^{(6)} = \dfrac{-\pi^6 + \pi^4 - \pi^2 + 1}{\pi^4} \sin(\pi t) - \pi \cos(\pi t) + -u - u^{(2)} - u^{(4)} + u^{(5)}, \ t \in \ 0,1 \ , \\ 10u(0) - u'(0) = -\pi, \ \ u(1) + u'(1) = -\pi, \ 10u^{(2)}(0) - u^{(3)}(0) = -1/\pi, \ \ u^{(2)}(1) + 8u^{(3)}(1) = -8/\pi, \\ u^{(4)}(0) - 10u^{(5)}(0) = -10/\pi^3, \ \ 6u^{(4)}(1) + 8u^{(5)}(1) = -8/\pi^3. \end{cases}$$

Đây là bài toán phi tuyến với điều kiện biên hỗn hợp. Có thể kiểm tra bài toán trên có nghiệm đúng là $u_d = \sin(\pi t)/\pi^4.$ Sử dụng thuật toán đã đề xuất, kí hiệu k là số bước lặp của sơ đồ, $\varepsilon = \left\| u_d - u \right\|_\infty$, ta thu được kết quả như sau:

Bảng 7. Số bước lặp, sai số ε trên lưới $n = 1000$

k	ε	k	ε
2	0.049	12	6.0×e-7
4	0.0094	14	5.0×e-8
6	9.0×e-4	16	4.0×e-9
8	6.0×e-5	18	4.0×e-10
10	7.0×e-6	20	4.0×e-12

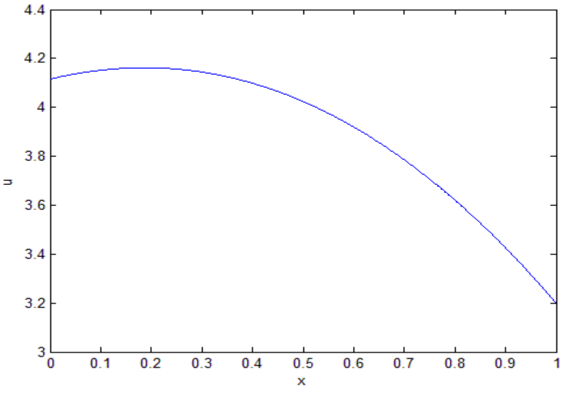
Bài toán 5: Xét bài toán

$$\begin{cases} u^{(6)} = t^5 + \sin(u) + uu' + \dfrac{(u^{(2)})^2}{2} + u^{(3)} + \sin(u^{(4)}) + (u^{(5)})^2, \ t \in \ 0,1 \ , \\ u(0) - u'(0) = 4, \ 2u(1) + u'(1) = 2, \ u^{(2)}(0) - u^{(3)}(0) = -1, \ u^{(2)}(1) + 4u^{(3)}(1) = -2, \\ u^{(4)}(0) - 2u^{(5)}(0) = \pi, \ u^{(4)}(1) + u^{(5)}(1) = \pi/4. \end{cases}$$

Đây là bài toán phi tuyến với điều kiện biên hỗn hợp, chúng ta không xác định được nghiệm đúng của bài toán này. Sử dụng thuật toán đã đề xuất ta sẽ tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán. Kí hiệu k là số bước lặp của sơ đồ, $\varepsilon = \left\| u_{k+1} - u_k \right\|_\infty$, ta thu được các kết quả sau đây:

Bảng 8. Số bước lặp, sai số ε trên lưới $n = 1000$

k	ε	k	ε
5	0.0936	30	$2.0\times$e-10
10	0.0016	35	$3.0\times$e-12
15	$2.0\times$e-5	40	$5.0\times$e-14
20	$5.0\times$e-7	45	$5.0\times$e-15
25	$9.0\times$e-9	50	$4.0\times$e-16



Hình 3. Đồ thị nghiệm xấp xỉ

Nhận xét: Qua các kết quả thực nghiệm, chúng ta có thể thấy rằng thuật toán QH_PT_2 đề xuất là hội tụ, các kết quả đảm bảo độ chính xác $o(h^4)$.

V. KẾT LUẬN

Nội dung chính của bài báo trình bày cơ sở toán học xây dựng các công thức tính xấp xỉ các đạo hàm với độ chính xác bậc cao dựa trên lý thuyết về đa thức nội suy Lagrange. Sử dụng bộ công thức xấp xỉ này, bài báo đề xuất phương pháp xây dựng lược đồ sai phân với độ chính xác bậc bốn giải bài toán biên cho phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ điều kiện biên hỗn hợp. Trên cơ sở kết quả này, sử dụng các phương pháp phân rã các bài toán cấp cao về hệ các bài toán cấp hai, kết hợp với phương pháp lặp, bài báo đề xuất các thuật toán xây dựng sơ đồ lặp giải các bài toán biên cho phương trình vi phân phi tuyến cấp bốn và cấp sáu tổng quát. Các thuật toán trong bài đã được kiểm tra bằng các chương trình thực nghiệm khẳng định độ chính xác của các thuật toán đề xuất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đặng Quang Á, Phương pháp số, Nhà xuất bản Đại học Thái Nguyên, 2010.

[2] Z. Bai, W. Ge and Y. Wang, “The method of lower and upper solutions for some fourth-order equations”, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, vol. 5, Issue 1, Article 13, 2004.

[3] Tạ Văn Đĩnh, Phương pháp sai phân và phương pháp phần tử hữu hạn, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2002.

[4] H. Feng, D. Ji, W. Ge, “Existence and uniqueness of solutions for a fourth–order boundary value problem”, Nonlinear Analysis, vol. 70, pp. 3561-3566, 2009.

[5] I.R. Khan, R. Ohba, “New finite difference formulas for numerical differentiation”, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 126, pp. 269-276, 2000.

[6] J. Li, “General explicit difference formulas for numerical differentiation”, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 183, pp. 29-52, 2005.

[7] A.A. Samarskij, E. Nikolaev, Numerical methods for grid equations, Birkhauser, Basel, 1989.

[8] Dang Quang A, Ngo Thi Kim Quy, ‘‘Existence results and iterative method for solving the cantilever beam equation with fully nonlinear term’’, Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 36, pp. 56–68, 2017.

[9] Dang Quang A, Dang Quang Long, Ngo Thi Kim Quy, ‘‘A novel efficient method for nonlinear boundary value problems’’, Numerical Algorithms, Doi:10.1007/s11075-017-0264-6, 2017.

DIFFERENCE SCHEMES FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR HIGH ORDER LINEAR AND NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Vu Vinh Quang, Nguyen Thanh Huong

ABSTRACT: *In this paper, we will present some results of determining the approximative formulas for derivatives with high order accuracy using the Lagrange interpolation polynomial. Then we will propose the difference scheme and a numerical algorithm with high order accuracy for the boundary value problem with mixed boundary conditions for second order linear differential equations. After that, the paper provides some results about iterative methods for solving some boundary problems for high order nonlinear differential equations. The results have been tested by empirical programs to confirm the accuracy of the proposed methods.*