

LƯỢC ĐỒ SAI PHÂN KHÁC THƯỜNG MÔ PHÒNG SỐ MỘT MÔ HÌNH LAN TRUYỀN VIRUS MÁY TÍNH

Hoàng Mạnh Tuấn¹, Đặng Quang Á²

¹Viện Công nghệ Thông tin, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

²Trung tâm Tin học và Tính toán, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

hmtuan01121990gmail.com, dangquanga@cic.vast.vn

TÓM TẮT: Trong bài báo này, lược đồ sai phân khác thường (nonstandard finite difference schemes - NSFD) bảo toàn các tính chất quan trọng của một mô hình lan truyền virus máy tính được xây dựng. Các tính chất quan trọng của mô hình này gồm có tính chất dương, tính chất bị chặn, điểm cân bằng và tính chất ổn định của điểm cân bằng. Ở đây tính chất ổn định của điểm cân bằng của NSFD được chứng tỏ nghiên cứu dựa trên một mở rộng của Định lý ổn định Lyapunov cổ điển. Các mô phỏng số khẳng định tính đúng đắn của các kết quả lý thuyết cũng như ưu thế của các NSFD so với các lược đồ sai phân bình thường (standard finite difference schemes - SFDS).

Từ khóa: Mô hình lan truyền virus máy tính, Lược đồ sai phân khác thường, Định lý ổn định Lyapunov, Mô phỏng số.

I. GIỚI THIỆU

Trong khoa học máy tính và công nghệ thông tin, virus máy tính (computer virus) được biết đến như một lớp các chương trình độc hại có khả năng tự sao chép, nhân bản và lây lan giữa các máy tính. Trong giai đoạn bùng nổ, virus máy tính có thể thực hiện hàng loạt các hành động phá hoại nghiêm trọng, thậm chí phá hủy hoàn toàn hệ thống máy tính, do đó tạo thành một mối đe dọa lớn đối với nhân loại [2, 16]. Hiện nay, virus máy tính gây ra các thiệt hại kinh tế lên đến hàng tỷ đô la mỗi năm do các nguyên nhân chính như các hệ thống và dữ liệu bị phá hủy, tài nguyên máy tính bị lãng phí và chi phí bảo trì hệ thống ngày một tăng cao... Các phần mềm phòng chống virus hiện nay được xem như một công cụ chính để ngăn ngừa và tiêu diệt virus máy tính. Tuy nhiên, sự phát triển của những phần mềm chống virus mới luôn bị tụt hậu so với sự phát triển của các virus máy tính. Do đó, không thể đưa ra các chính sách lâu dài về phòng chống virus.

Trong vài thập kỷ trở lại đây, nhiều tác giả đã thực hiện mô hình hóa toán học các mô hình lan truyền virus máy tính thông qua các hệ phương trình vi phân, mà tiêu biểu là các kết quả trong [14, 17-21]. Ý tưởng xây dựng các mô hình này bắt nguồn từ sự tương đồng giữa virus máy tính với virus trong các hệ dịch tễ học và sinh học. Việc xây dựng và nghiên cứu các tính chất của các mô hình này giúp chúng ta hiểu đầy đủ cơ chế lây lan của các virus máy tính. Trên cơ sở đó dễ dàng kiểm soát, tiêu diệt cũng như hoạch định những chính sách lâu dài trong phòng chống sự lây lan của các loại virus máy tính. Tuy nhiên phần lớn những kết quả trong chủ đề này chủ yếu tập trung vào xây dựng và nghiên cứu định tính các mô hình lan truyền virus máy tính. Trong khi đó các mô hình loại này thường rất phức tạp và không có hy vọng tìm được nghiệm chính xác. Chính vì vậy, việc nghiên cứu các phương pháp số giải gần đúng, đặc biệt là các phương pháp số bảo toàn chính xác các tính chất của mô hình liên tục cho các mô hình lan truyền virus máy tính có ý nghĩa đặc biệt quan trọng. Trên thực tế có rất nhiều những mô hình lan truyền virus máy tính đã được mô hình hóa và nghiên cứu hoàn chỉnh về mặt định tính nhưng chưa có các phương pháp số tương ứng bảo toàn các tính chất quan trọng của mô hình liên tục.

Như đã phân tích ở trên, các mô hình lan truyền virus máy tính thường được mô hình hóa toán học bằng các hệ phương trình vi phân phức tạp. Có nhiều cách để giải gần đúng các hệ phương trình vi phân này, trong đó một trong những phương pháp số phổ biến là phương pháp sai phân bình thường (standard finite difference methods-SFDM), chẳng hạn phương pháp Euler, phương pháp Runge-Kutta, phương pháp Taylor [1]. Tuy nhiên, trong nhiều bài toán phi tuyến các SFDM bộc lộ một nhược điểm nghiêm trọng là hiện tượng không ổn định số (numerical instabilities) [10-13]. Nói một cách đơn giản thì hiện tượng không ổn định số là hiện tượng khi các phương pháp số không bảo toàn được các tính chất của các phương trình vi phân tương ứng. Trong khi đó một yêu cầu quan trọng hàng đầu với các phương pháp số là phải bảo toàn được các tính chất quan trọng của phương trình vi phân. Nói cách khác, các mô hình liên tục phải được chuyển đổi thành các mô hình rời rạc bảo toàn chính xác các tính chất của mô hình liên tục. Nhìn chung, các SFDM chỉ bảo toàn được các tính chất của mô hình liên tục khi tham số rời rạc (bước lưới) được chọn đủ nhỏ. Vì thế khi nghiên cứu mô hình động lực trên khoảng thời gian rất lớn thì việc chọn bước lưới nhỏ dẫn đến số lượng tính toán rất lớn, hay nói cách khác thì các SFDM là không hiệu quả. Ngoài ra, trong nhiều trường hợp các SFDM cũng không thể bảo toàn tính chất của mô hình liên tục với mọi bước lưới. Để khắc phục hiện tượng không ổn định số, vào những năm 80 của thế kỷ trước Mickens đã đề xuất khái niệm lược đồ sai phân khác thường khác với các lược đồ sai phân bình thường. Đây là lớp phương pháp số có thể bảo toàn chính xác các tính chất của phương trình vi phân tương ứng [10-13].

Cho tới nay các NSFD đã trở thành một công cụ quan trọng và hiệu quả trong giải số phương trình vi phân và mô phỏng số các hệ động lực phức tạp [10-13, 15]. Cần nhấn mạnh rằng NSFD có thể bảo toàn các tính chất của phương trình vi phân với mọi bước lưới $h > 0$, tức là tính chất của NSFD không phụ thuộc vào bước lưới. Ngày nay các NSFD được áp

dụng cho rất nhiều các mô hình quan trọng trong các lĩnh vực ứng dụng như vật lý, hóa học, sinh học, y học... Gần đây chúng tôi đã đạt được một số kết quả bước đầu trong xây dựng NSFD cho một số mô hình quan trọng trong sinh học [3, 5-7]. Ngoài ra một trường hợp lý tưởng của NSFD là lược đồ sai phân chính xác (exact finite difference schemes) cũng được chúng tôi xây dựng cho các hệ phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng [4]. Tuy nhiên, theo hiểu biết của chúng tôi thì NSFD chưa được áp dụng cho các mô hình lan truyền virus máy tính, mặc dù đây là các mô hình có ý nghĩa đặc biệt quan trọng và đã có rất nhiều các mô hình nghiên cứu hoàn chỉnh về mặt định tính.

Chính vì những lý do trên, với mục tiêu tiếp tục xây dựng các NSFD cho các mô hình lan truyền virus máy tính đã được nghiên cứu hoàn chỉnh về mặt định tính, trong bài báo này chúng tôi xét một mô hình lan truyền virus máy tính được đề xuất bởi Yang năm 2014 [17]. Đây là một mô hình ứng dụng quan trọng với các tính chất phức tạp. Các NSFD được chúng tôi xây dựng bảo toàn chính xác các tính chất của mô hình liên tục. Một kết quả quan trọng trong xây dựng các NSFD là chúng tôi sử dụng một mở rộng của Định lý Lyapunov để nghiên cứu tính chất ổn định của mô hình rời rạc. Cách làm này đơn giản và hiệu quả hơn rất nhiều so với cách sử dụng Định lý Lyapunov cổ điển vì tránh được tính toán phức tạp trong bối cảnh mô hình có số chiều lớn và chứa nhiều tham số.

Tổ chức của bài báo này như sau. Trong Mục II chúng tôi nhắc lại mô hình toán học và các tính chất của mô hình. Các NSFD bảo toàn các tính chất quan trọng của mô hình được xây dựng trong Mục III. Các mô phỏng số dựa trên các NSFD được trình bày trong Mục IV. Mục V là một số kết luận.

II. MÔ HÌNH TOÁN HỌC VÀ CÁC TÍNH CHẤT [17]

Để đơn giản, các máy tính được gọi là các nút (nodes). Một nút được gọi là nút trong hay nút ngoài phụ thuộc vào việc nó có được kết nối internet hay không. Một nút được gọi là bị nhiễm bệnh (infected) hoặc không bị nhiễm bệnh (uninfected) tùy thuộc vào việc nó có chứa virus hay không. Một nút bị nhiễm bệnh được xem là tiềm ẩn (latent) hay đang bị phá hoại (breaking-out) tùy thuộc vào tất cả các virus trong nó là tiềm ẩn hay có ít nhất một virus đang phá hoại. Tất cả các nút trong mạng toàn cầu được phân chia thành 3 lớp: Các nút trong không bị nhiễm bệnh (uninfected internal nodes, S-nodes), các nút trong tiềm ẩn (latent internal nodes, L-nodes) và các nút trong đang bị phá hoại (breaking-out internal nodes, B-nodes). Một cách tương tự, tất cả các nút ngoài trên toàn cầu cũng được chia làm 3 lớp tương ứng: S^*, L^*, B^* . Ký hiệu $S(t), L(t), B(t)$ là số nút lớp S, L, B tại thời gian t tương ứng. Dựa trên các giả thiết $(H_1) - (H_6)$ trong [17] Yang đã đề xuất một mô hình lan truyền virus máy tính được mô tả bởi hệ ba phương trình vi phân phi tuyến sau:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu_1 - (\beta_1 L + \beta_2 B)S + \gamma_1 L + \gamma_2 B - (\delta + \theta)S, \\ \frac{dL}{dt} &= \mu_2 + (\beta_1 L + \beta_2 B)S - (\gamma_1 + \alpha + \delta)L + \theta S, \\ \frac{dB}{dt} &= \alpha L - (\gamma_2 + \delta)B,\end{aligned}\tag{1}$$

trong đó các giá trị ban đầu $S(0), L(0), B(0)$ thuộc R_+^3 và $\mu_1, \mu_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \alpha, \delta, \theta$ là các tham số dương đặc trưng cho mô hình. Dựa trên các phân tích toán học trong [17] chúng tôi phát biểu lại các tính chất quan trọng của mô hình (1) trong Định lý dưới đây.

Định lý 1. Mô hình (1) có các tính chất quan trọng sau đây:

(P_1) *Tính chất dương của nghiệm: Tập R_+^3 là một tập bất biến dương của (1). Nói cách khác, tất cả các nghiệm của mô hình (1) với các giá trị ban đầu không âm cũng không âm.*

(P_2) *Tính chất đơn điệu hội tụ: Với các giá trị ban đầu thuộc R_+^3 , tổng các nghiệm $N(t) := S(t) + L(t) + B(t)$ hội tụ đơn điệu về giá trị $N^* := \mu/\delta$, trong đó $\mu = \mu_1 + \mu_2$.*

(P_3) *Sự tồn tại điểm cân bằng: Mô hình (1) có duy nhất một điểm cân bằng $E_* = (L_*, B_*, S_*)$ được xác định bởi*

$$S_* = N_* - L_* - B_*, \quad L_* = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}, \quad B_* = \frac{\alpha}{\gamma + \delta} L_*,\tag{2}$$

trong đó

$$a_0 = (\alpha + \gamma_2 + \delta)[\beta_1(\gamma_2 + \delta) + \beta_2 \alpha], \quad a_2 = -\left(\mu_2 + \frac{\theta \mu}{\delta}\right)(\gamma_2 + \delta)^2,\tag{3}$$

$$a_1 = (\gamma_2 + \delta)\left\{\frac{\mu}{\delta}[-\beta_1(\gamma_2 + \delta) - \beta_2 \alpha] + (\alpha + \gamma_1 + \delta)(\gamma_2 + \delta) + \theta(\alpha + \gamma_2 + \delta)\right\}.$$

(P_4) *Tính chất ổn định tiệm cận địa phương: Điểm cân bằng E_* là điểm cân bằng ổn định tiệm cận địa phương của mô hình (1).*

(P_5) *Tính chất ổn định toàn cục: Điểm cân bằng E_* là điểm cân bằng ổn định toàn cục của mô hình (1).*

Mục tiêu của chúng tôi là xây dựng các mô hình rời rạc bảo toàn các tính chất (P_1) - (P_5) của mô hình (1), tức là mô hình rời rạc tương thích động học với mô hình liên tục. Mô hình loại này đã được chúng tôi xây dựng cho một số mô hình quan trọng trong sinh học mới đây [3, 5-7] bằng các NSFD.

III. XÂY DỰNG LƯỢC ĐỒ SAI PHÂN KHÁC THƯỜNG

Bây giờ mục tiêu chính của chúng tôi là xây dựng các NSFD bảo toàn chính xác các tính chất của (1) với mọi bước lưới $h > 0$. Với mục tiêu đó, đầu tiên chúng tôi đề xuất NSFD cho (1) dựa trên rời rạc hóa không địa phương hàm về phải kết hợp với lựa chọn hàm mẫu số khác thường ở dạng:

$$\begin{aligned}\frac{S_{k+1} - S_k}{\varphi(h)} &= \mu_1 - (\beta_1 L_k + \beta_2 B_k) S_{k+1} + \gamma_1 L_k + \gamma_2 B_k - (\delta + \theta) S_k \\ \frac{L_{k+1} - L_k}{\varphi(h)} &= \mu_2 + (\beta_1 L_k + \beta_2 B_k) S_{k+1} - (\gamma_1 + \alpha + \delta) L_k + \theta S_k, \\ \frac{B_{k+1} - B_k}{\varphi(h)} &= \alpha L_k - (\gamma_2 + \delta) B_k,\end{aligned}\quad (4)$$

trong đó $\varphi(h) = h + O(h^2)$. Để đơn giản chúng tôi sẽ bỏ qua đối số h trong hàm $\varphi(h)$. Chúng tôi sẽ xác định các điều kiện đặt lên hàm mẫu số để lược đồ (4) bảo toàn các tính chất (P_1) - (P_5) của mô hình (1).

Định lý 2. *Đối với NSFD (4) nếu ta giả thiết thêm rằng hàm φ thỏa mãn điều kiện (5) dưới đây thì các tính chất (P_1) , (P_2) và (P_3) của mô hình (1) được bảo toàn:*

$$\varphi < \min \left\{ \frac{1}{\delta + \theta}, \frac{1}{\gamma_1 + \alpha + \delta}, \frac{1}{\gamma_2 + \delta}, \frac{2}{\delta} \right\}. \quad (5)$$

Chứng minh. Đầu tiên ta sử dụng quy nạp để chứng minh rằng tính chất (P_1) được bảo toàn. Để ý rằng dạng hiển trong ứng của (4) là

$$\begin{aligned}S_{k+1} &= \frac{[1 - \varphi(\delta + \theta)]S_k + \varphi\gamma_1 L_k + \varphi\gamma_2 B_k + \varphi\mu_1}{1 + \varphi(\beta_1 L_k + \beta_2 B_k)}, \\ L_{k+1} &= \varphi\mu_2 + \varphi(\beta_1 L_k + \beta_2 B_k) S_{k+1} + [1 - \varphi(\gamma_1 + \alpha + \delta)]L_k + \varphi\theta S_k, \\ B_{k+1} &= \alpha L_k + [1 - \varphi(\gamma_2 + \delta)]S_k,\end{aligned}\quad (6)$$

do đó, nếu $S_k, L_k, B_k \geq 0$ và φ thỏa mãn (5) thì $S_{k+1}, L_{k+1}, B_{k+1} \geq 0$. Như vậy, tính chất (P_1) của mô hình được bảo toàn.

Tiếp theo, nếu ký hiệu $N_k := S_k + L_k + B_k$ và cộng về với về của (4) ta nhận được phương trình sai phân tuyến tính $N_{k+1} = (1 - \varphi\delta)N_k + \varphi\mu$. Do φ thỏa mãn (5) nên dễ dàng suy ra tính chất hội tụ đơn điệu của dãy $\{N_k\}$. Nói cách khác, tính chất (P_2) được bảo toàn.

Tương tự như đối với mô hình liên tục, dễ dàng kiểm tra được rằng (4) cũng có duy nhất một điểm cân bằng là E_* được xác định bởi (2). Như vậy việc chứng minh Định lý được hoàn tất.

Tiếp theo chúng tôi phân tích tính chất ổn định của lược đồ (4). Trong bối cảnh mô hình đang xét có chứa nhiều tham số và số chiều bằng ba thì việc phân tích tính chất ổn định thông qua Định lý Lyapunov không trực tiếp (Tiêu chuẩn Jury) là rất phức tạp. Chính vì vậy, tương tự như trong [3, 5, 7] chúng tôi sử dụng một mở rộng của Định lý Lyapunov cổ điển nhằm chuyển việc nghiên cứu tính chất ổn định của (4) về nghiên cứu một mô hình có số chiều nhỏ hơn. Nhờ đó dễ dàng thiết lập tính chất ổn định của mô hình.

Với mục tiêu đó, chúng tôi xét hàm

$$V(S, L, B) = \left(S + L + B - \frac{\mu}{\delta}\right)^2, \quad (S, L, B) \in R_+^3.$$

Dễ thấy rằng do tính chất (P_2) của mô hình (1) được bảo toàn nên tất cả các nghiệm của (4) là bị chặn. Do đó, tương tự như trong [3, 5, 7] dễ dàng chứng minh được rằng hàm V thỏa mãn tất cả các điều kiện của [9, Theorem 3.3] trên R_+^3 . Trong trường hợp này, tập bất biến dương lớn nhất chứa tập $G = \{(S, L, B) \in R_+^3: \Delta V(S, L, B) = 0\}$ là tập $G^* = \{(S, L, B) \in R_+^3: S + L + B = \mu/\delta\}$. Chính vì vậy tính chất ổn định của (4) trên R_+^3 là tương đương với tính chất ổn định của hệ hai phương trình sau đây trên R_+^2 :

$$\begin{aligned}\frac{L_{k+1} - L_k}{\varphi} &= \mu_2 + (\beta_1 L_k + \beta_2 B_k) \left(\frac{\mu}{\delta} - L_{k+1} - B_{k+1}\right) - (\gamma_1 + \alpha + \delta)L_k + \theta \left(\frac{\mu}{\delta} - L_k - B_k\right), \\ \frac{B_{k+1} - B_k}{\varphi} &= \alpha L_k - (\gamma_2 + \delta)B_k.\end{aligned}\quad (7)$$

Chú ý rằng (7) chỉ gồm hai phương trình trong khi (4) có ba phương trình. Vì thế, việc phân tích tính chất ổn định của (7) đơn giản hơn rất nhiều so với (4). Lúc này tiêu chuẩn Jury dễ dàng được sử dụng. Ta chú ý rằng (7) chính là hạn chế của (4) trên tập G^* , do đó (7) cũng có duy nhất một điểm cân bằng là $E_{**} = (L_*, B_*)$, trong đó L_*, B_* được xác định bởi (2).

Bổ đề 1. Xét mô hình (1) với các tham số $\mu_1, \mu_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \alpha, \delta, \theta > 0$. Nếu ta ký hiệu

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \beta_1 L_* + \beta_2 B_*, \quad \tau_2 = \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha + 2\delta + \theta - \beta_1 S_*, \\ \tau_3 &= \tau_1 \alpha + (\gamma_2 + \delta)(\beta_1 S_* - \gamma_1 - \alpha - \delta - \theta) + \alpha(\beta_2 S_* - \tau_1 - \theta), \\ \tau_4 &= \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha + 2\delta + \theta - \beta_1 S_* - \tau_1, \quad \tau_5 = \tau_1(\gamma_2 + \alpha + \delta), \end{aligned} \tag{8}$$

thì $\tau_1 + \tau_2 > 0$ và $\tau_5 - \tau_3 > 0$. Ngoài ra luôn tồn tại một số $\varphi_0 > 0$ sao cho $4 - (\tau_2 + \tau_4 - \tau_1)\varphi - (\tau_5 + \tau_3)\varphi^2 > 0$ với mọi $\varphi \in (0, \varphi_0)$.

Chứng minh. Để ý rằng (S_*, L_*, B_*) là điểm cân bằng của (1), từ phương trình thứ hai và thứ ba của (1) ta có

$$\mu_2 + (\beta_1 L_* + \beta_2 B_*) S_* - (\gamma_1 + \alpha + \delta)L_* + \theta S_* = 0, \quad \frac{L_*}{B_*} = \frac{\gamma_2 + \delta}{\alpha}. \tag{9}$$

Từ đây dễ dàng suy ra rằng $\beta_1 S_* < \gamma_1 + \alpha + \delta$. Do đó $\tau_2 > 0$. Vì $\tau_1 > 0$ nên $\tau_1 + \tau_2 > 0$.

Tiếp theo ta có

$$\tau_5 - \tau_3 = (\gamma_2 + \delta)(\tau_1 + \gamma_1 + \alpha + \delta + \theta) + \alpha(\tau_1 + \theta) - \alpha\beta_2 S_* - \beta_1(\gamma_2 + \delta)S_*.$$

Cũng xuất phát từ (9) ta có đánh giá sau:

$$\beta_2 S_* < (\gamma_1 + \alpha + \delta) \frac{L_*}{B_*} - \beta_1 S_* \frac{L_*}{B_*} = \frac{(\gamma_1 + \alpha + \delta)(\gamma_2 + \delta)}{\alpha} - \beta_1 S_* \frac{\gamma_2 + \delta}{\alpha},$$

do đó ta nhận được $\alpha\beta_2 S_* + \beta_1(\gamma_2 + \delta)S_* < (\gamma_1 + \alpha + \delta)(\gamma_2 + \delta)$. Từ bất đẳng thức này suy ra rằng $\tau_5 - \tau_3 > 0$.

Kết luận cuối cùng của Mệnh đề được suy ra trực tiếp từ Định nghĩa giới hạn của hàm số.

Định lý 3. Xét lược đồ (7) dưới các giả thiết của Định lý 2. Nếu ta giả thiết thêm rằng hàm φ thỏa mãn điều kiện

$$\varphi < \min\{\varphi_1, \varphi_2\}, \tag{10}$$

trong đó φ_1, φ_2 được xác định bởi

$$\varphi_1 = \begin{cases} \infty, & \text{nếu } \tau_3 \geq 0, \\ \frac{\tau_1 + \tau_2}{-\tau_3}, & \text{nếu } \tau_3 < 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\varphi_2 = \sup\{\varphi > 0: 4 - (\tau_2 + \tau_4 - \tau_1)\varphi - (\tau_5 + \tau_3)\varphi^2 > 0\},$$

thì $E_{**} = (L_*, B_*)$ là điểm cân bằng ổn định địa phương của (7). Nói cách khác $E_* = (S_*, L_*, B_*)$ là điểm cân bằng ổn định địa phương của (4). Điều đó có nghĩa là tính chất (P_4) của mô hình (1) được bảo toàn.

Chứng minh. Dễ dàng tính được ma trận Jacobian của (7) tại điểm cân bằng E_{**} là

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1 + \varphi(\beta_1 S_* - \gamma_1 - \alpha - \delta - \theta) - \varphi^2 \tau_1 \alpha}{1 + \tau_1 \varphi} & \frac{\varphi(\beta_2 S_* - \tau_1 - \theta) + \varphi^2 \tau_1(\gamma_2 + \delta)}{1 + \tau_1 \varphi} \\ \varphi \alpha & 1 - \varphi(\gamma_2 + \delta) \end{pmatrix},$$

từ đây ta nhận được

$$\det(J) = \frac{1 - \tau_1 \varphi - \tau_3 \varphi^2}{1 + \tau_1 \varphi}, \quad \text{Trace}(J) = \frac{2 - \tau_4 \varphi - \tau_5 \varphi^2}{1 + \tau_1 \varphi},$$

trong đó τ_i ($i = 1, \dots, 5$) được xác định bởi (8). Tiêu chuẩn Jury [8] cho tính chất ổn định của điểm cân bằng là

$$\det(J) < 1, \quad 1 + \det(J) - \text{Trace}(J) > 0, \quad 1 + \det(J) + \text{Trace}(J) > 0. \tag{12}$$

Hệ điều kiện trong (12) tương đương với

$$\tau_1 + \tau_2 > -\tau_3 \varphi, \quad \tau_5 - \tau_3 > 0, \quad 4 - (\tau_2 + \tau_4 - \tau_1)\varphi - (\tau_5 + \tau_3)\varphi^2 > 0. \tag{13}$$

Theo Bổ đề 1 thì hai điều kiện cuối của (13) được thỏa mãn. Mặt khác dễ dàng kiểm tra rằng nếu φ thỏa mãn (10) thì điều kiện cuối cùng của (13) cũng được thỏa mãn. Do đó tính chất ổn định địa phương của E_* được chứng minh. Việc chứng minh được hoàn tất.

Tổng hợp các kết quả trong mục này chúng tôi thu được Định lý sau đây về NSFD bảo toàn các tính chất quan trọng của mô hình (1).

Định lý 4. *Đối với NSFD (4) nếu ta giả thiết thêm rằng hàm φ thỏa mãn*

$$\varphi < \varphi^* := \min \left\{ \frac{1}{\delta + \theta}, \frac{1}{\gamma_1 + \alpha + \delta}, \frac{1}{\gamma_2 + \delta}, \frac{2}{\delta}, \varphi_1, \varphi_2 \right\}, \quad (14)$$

trong đó φ_1, φ_2 được xác định như trong (11) thì NSFD (4) bảo toàn các tính chất (P_1) - (P_4) của mô hình (1).

Chú ý 1. (i) Có rất nhiều cách để lựa chọn hàm φ thỏa mãn điều kiện của Định lý 4 chẳng hạn ta có thể chọn họ hàm

$$\varphi(h) = \frac{1 - e^{-\tau h}}{\tau}, \quad \tau > \frac{1}{\varphi^*}.$$

(ii) Định lý 4 chỉ đảm bảo các tính chất (P_1) - (P_4) của mô hình (1) được bảo toàn. Tuy nhiên các mô phỏng số trong Mục IV đều đồng ý rằng nếu NSFD (4) thỏa mãn Định lý 4 thì tính chất (P_5) của mô hình (1) cũng được bảo toàn. Điều này hoàn toàn tương tự với các kết quả của chúng tôi trong [3, 5] về NSFD cho mô hình metapopulation.

IV. CÁC THỬ NGHIỆM SỐ

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số thử nghiệm số nhằm khẳng định các kết quả lý thuyết đã được chứng minh cũng như ưu thế của các NSFD so với các SFDS.

Xét mô hình (1) với các tham số [17]

$$(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \mu_1, \mu_2, \alpha, \delta, \theta) = (0.01, 0.05, 0.3, 0.1, 4, 2, 0.2, 0.1, 0.2).$$

Trong trường hợp này mô hình có điểm cân bằng là $(S_*, L_*, B_*) = (7.7374, 26.1313, 26.1313)$. Ngoài ra các tham số τ_i trong Bổ đề 1 là

$$(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5) = (1.5679, 0.9226, -0.1072, -0.4453, 0.6272).$$

Từ đó ta có thể chọn tham số φ^* trong Định lý 4 là $\varphi^* = 1.6667$. Do đó chúng tôi chọn hàm mẫu số cho NSFD (4) là

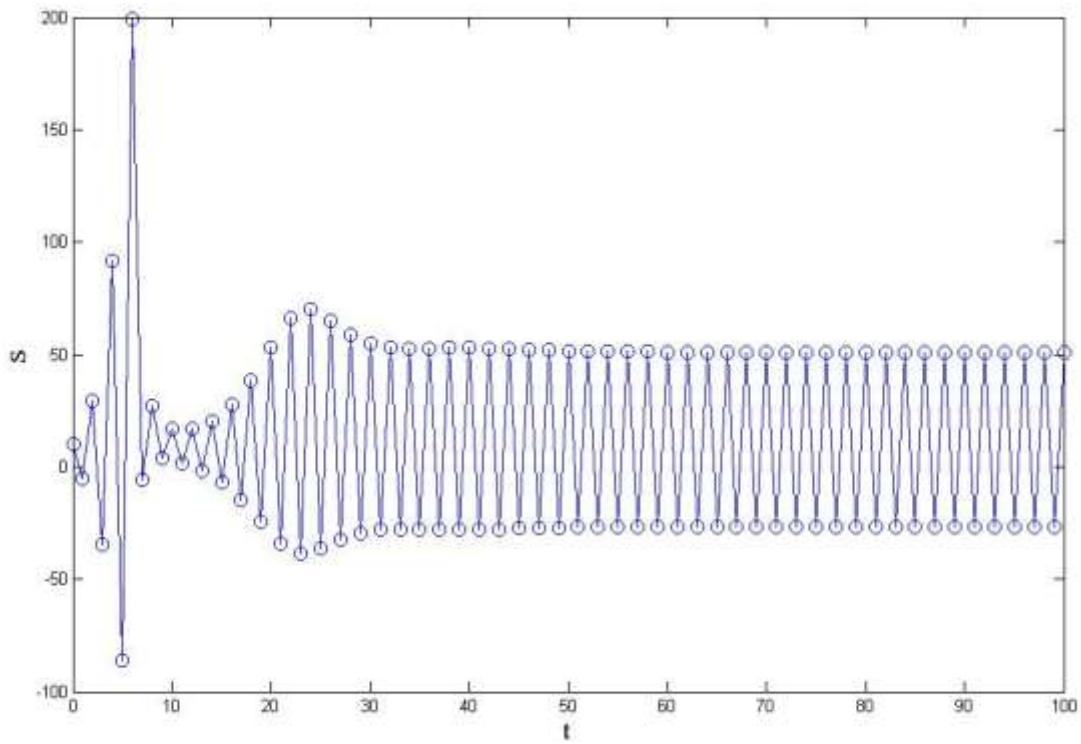
$$\varphi(h) = \frac{1 - e^{-1.6h}}{1.6}.$$

Bây giờ chúng tôi so sánh nghiệm số thu được từ NSFD (4) với hai SFDS tiêu biểu là lược đồ Euler hiển và lược đồ Runge-Kutta bốn nấc kinh điển (RK4).

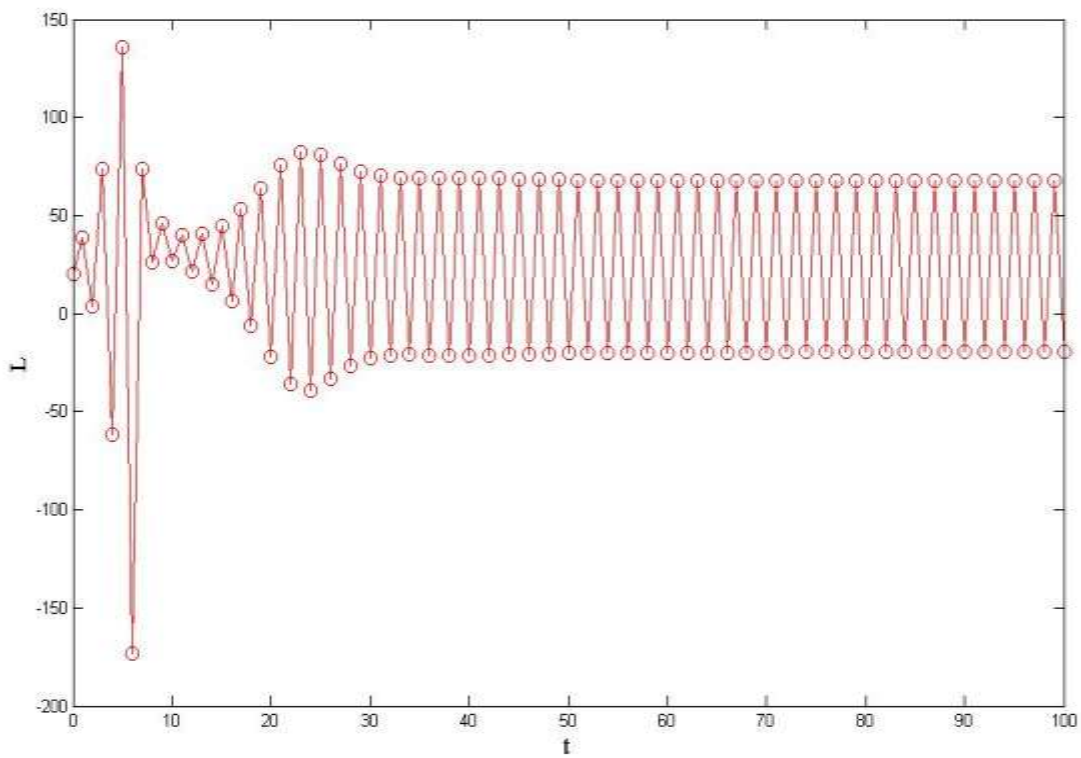
Nghiệm số thu được từ lược đồ Euler hiển được biểu diễn trong các Hình 1, 2 và 3. Từ các hình vẽ ta thấy tính chất dương và tính chất bị chặn của nghiệm bị phá vỡ. Nghiệm số thu được từ lược đồ Euler hiển dao động xung quanh vị trí cân bằng. Các tính chất quan trọng của mô hình không được bảo toàn.

Tương tự như vậy Hình 4, 5, 6, biểu diễn nghiệm số thu được từ lược đồ RK4. Từ các hình vẽ dễ thấy tính chất dương của nghiệm cũng bị phá vỡ. Ngoài ra lược đồ RK4 sinh ra thêm điểm bất động giả phụ thuộc vào bước lưới. Cụ thể, các nghiệm thu được từ lược đồ RK4 hội tụ tới vị trí $(S^0, L^0, B^0) = (32.5206, 0.6028, 26.8766)$ trong khi điểm cân bằng duy nhất của mô hình (1) lại là $(L_*, B_*, S_*) = (7.7374, 26.1313, 26.1313)$. Đây là một trong những nhược điểm chung của các lược đồ sai phân bình thường, đó là sinh ra thêm các điểm bất động giả phụ thuộc vào bước lưới [10-13].

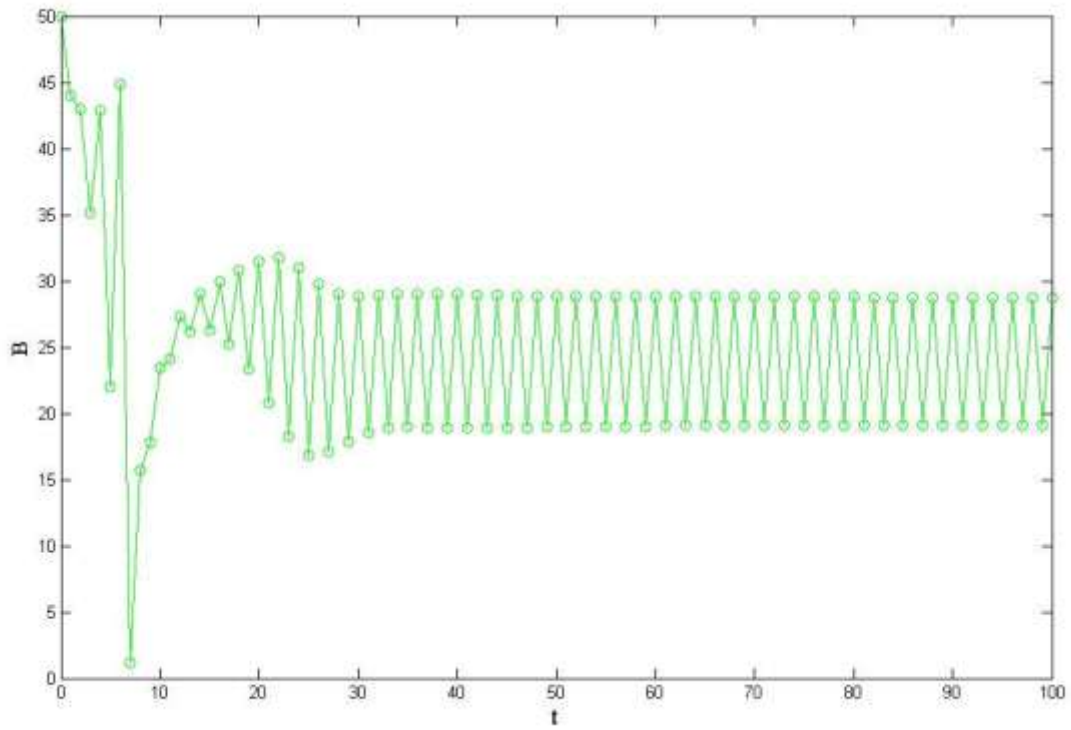
Cuối cùng, nghiệm số thu được từ NSFD (4) được biểu diễn trong Hình 7. Từ hình vẽ, rõ ràng các tính chất quan trọng của mô hình (1) được bảo toàn. Ví dụ này cũng cho thấy tính chất ổn định toàn cục (P_5) của mô hình cũng được bảo toàn. Điều đó cho thấy các kết quả lý thuyết được xây dựng là hoàn toàn đúng đắn.



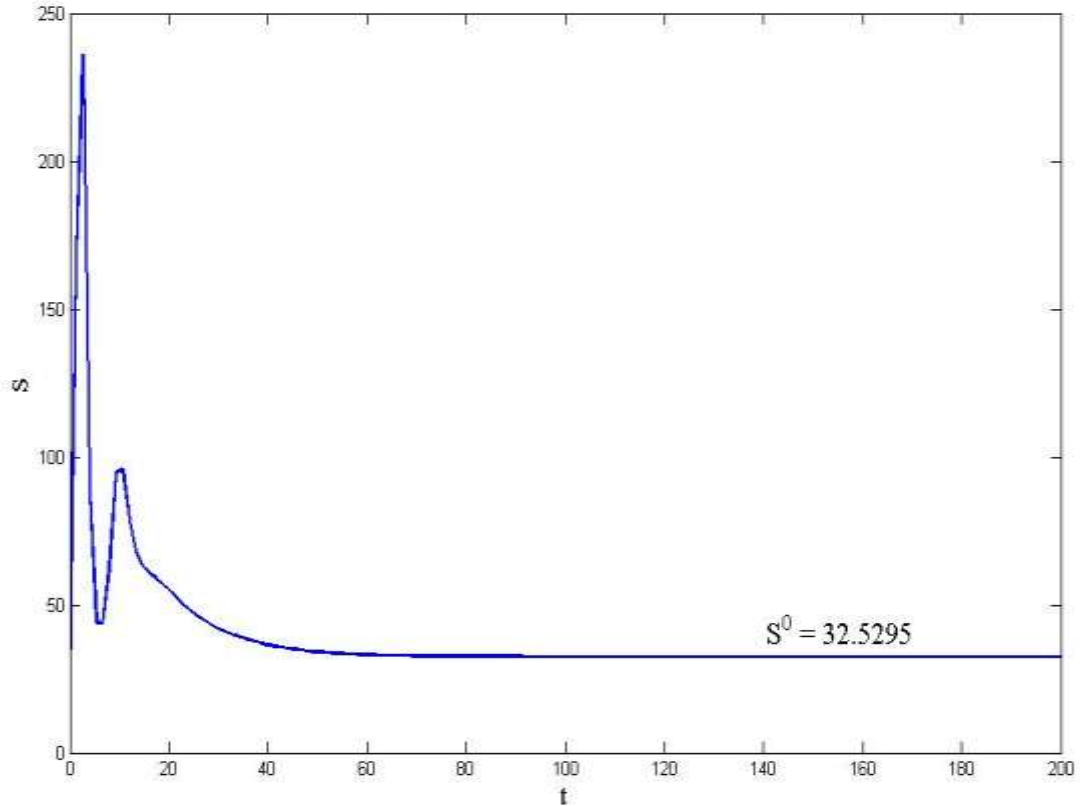
Hình 1. Nghiệm số S_k thu được bởi lược đồ Euler với $(S(0), L(0), B(0)) = (10, 20, 50)$ và $h = 1$



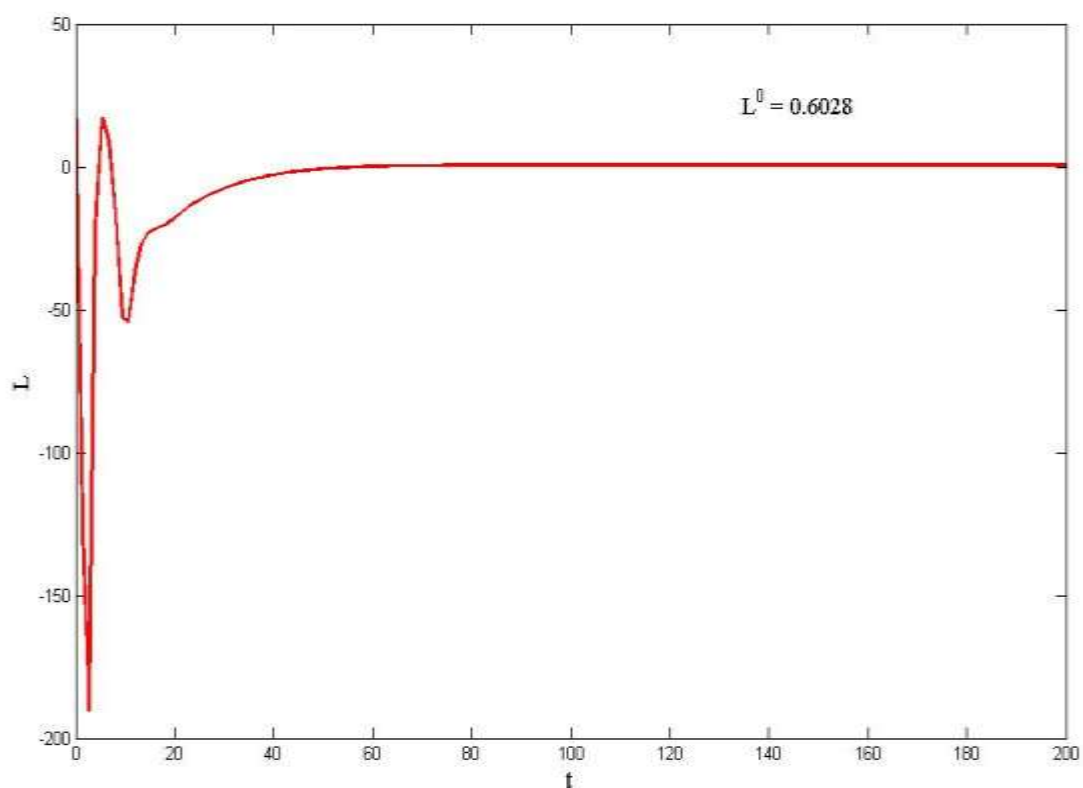
Hình 2. Nghiệm số L_k thu được bởi lược đồ Euler với $(S(0), L(0), B(0)) = (10, 20, 50)$ và $h = 1$



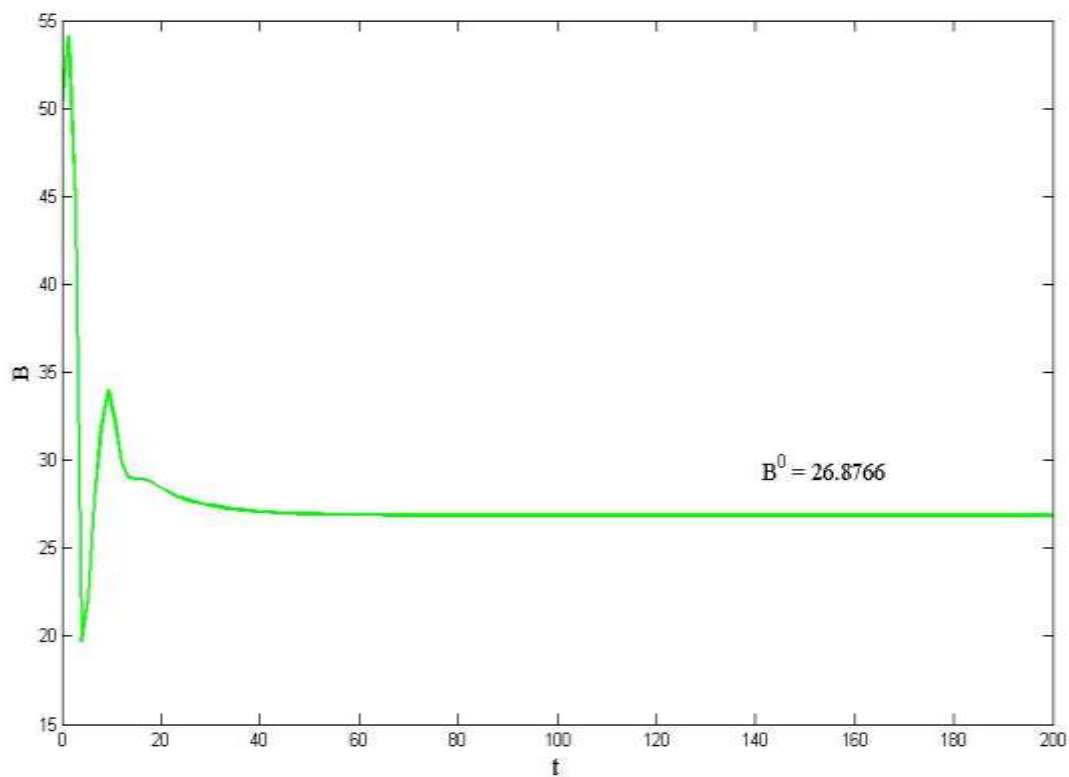
Hình 3. Nghiệm số B_k thu được bởi lược đồ Euler với $(S(0), L(0), B(0)) = (10, 20, 50)$ và $h = 1$



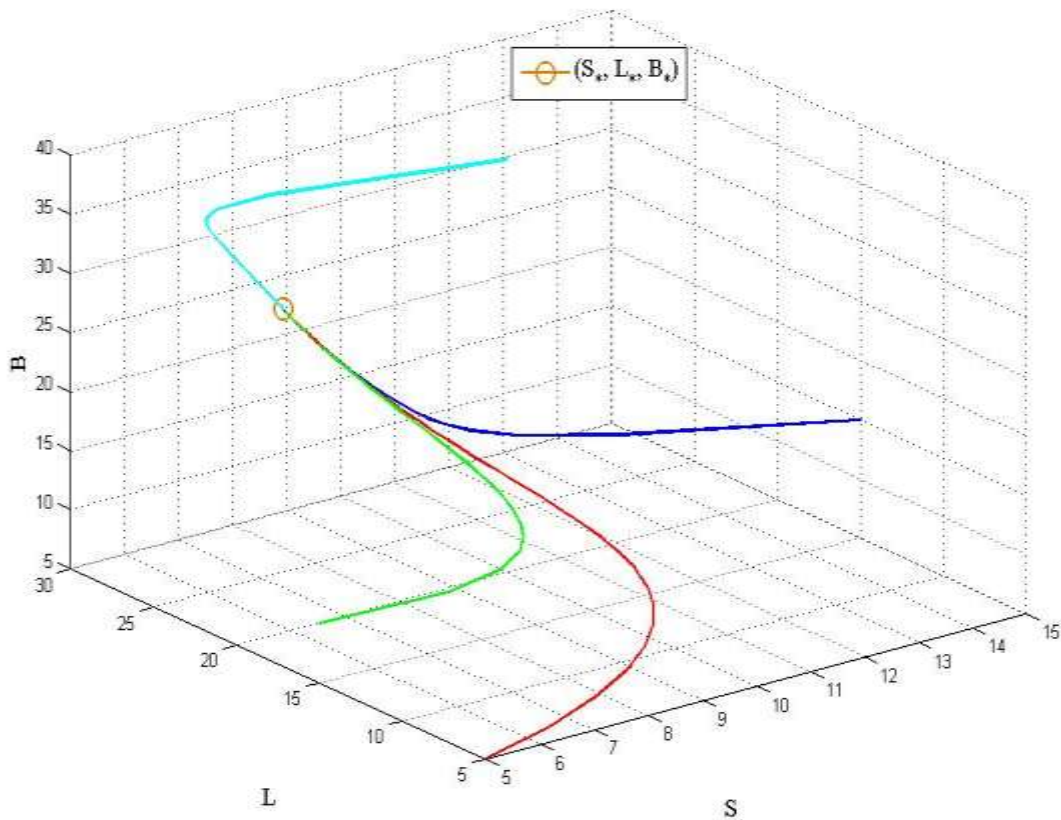
Hình 4. Nghiệm số S_k thu được bởi lược đồ RK4 với $(S(0), L(0), B(0)) = (20, 30, 50)$ và $h = 4/3$



Hình 5. Nghiệm số L_k thu được bởi lược đồ RK4 với $(S(0), L(0), B(0)) = (20, 30, 50)$ và $h = 4/3$



Hình 6. Nghiệm số B_k thu được bởi lược đồ RK4 với $(S(0), L(0), B(0)) = (20, 30, 50)$ và $h = 4/3$



Hình 7. Nghiệm số thu được bởi lược đồ NSFD (4) với $h = 5$ và $t \in [0, 1000]$

V. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, lược đồ sai phân khác thường bảo toàn các tính chất quan trọng của một mô hình lan truyền virus máy tính được xây dựng. Đáng chú ý là tính chất ổn định của các mô hình rời rạc được nghiên cứu dựa trên một mở rộng của Định lý Lyapunov cổ điển. Cách làm này khắc phục được những nhược điểm của Định lý Lyapunov cổ điển trong bối cảnh mô hình được xét chứa nhiều tham số và có số chiều lớn. Các mô phỏng số khẳng định tính đúng đắn của các kết quả lý thuyết được xây dựng cũng như ưu thế của các lược đồ sai phân khác thường so với các lược đồ sai phân bình thường. Trong tương lai chúng tôi sẽ phát triển kết quả này cho các mô hình bài toán có các tính chất tương tự, nhưng phức tạp, chứa nhiều tham số và có số chiều lớn.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu của tác giả thứ nhất được hỗ trợ kinh phí bởi Viện Công nghệ Thông tin – Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, Mã số đề tài CS 17.06.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] U. M. Ascher, Linda R. Petzold, Computer methods for Ordinary Differential Equations and Differential Algebraic Equations, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [2] F. Cohen, Computer viruses: theory and experiments. Comput Secur, 6(1)(1987), pp. 22-35.
- [3] Q. A. Dang, M. T. Hoang, Dynamically consistent discrete metapopulation model, Journal of Difference Equations and Applications, 22 (2016), pp. 1325-1349.
- [4] Q. A. Dang, M. T. Hoang, Exact Finite Difference Schemes for Three-Dimensional Linear Systems with Constant Coefficients, Vietnam Journal of Mathematics, DOI:10.1007/s10013-017-0249-8.
- [5] Q. A. Dang, M. T. Hoang, Lyapunov direct method for investigating stability of nonstandard finite difference schemes for metapopulation models, Preprint submitted to Journal of Difference Equations and Applications, arXiv:1701.05667 [math.NA].

- [6] Q. A. Dang, M. T. Hoang, Nonstandard finite difference schemes for a general predator-prey system, Preprint submitted to Matcom, arXiv:1701.05663 [math.NA].
- [7] Đặng Quang Á, Hoàng Mạnh Tuấn, Lược đồ sai phân khác thường mô phỏng số mô hình siêu quần thể: Sử dụng Định lý ổn định Lyapunov, Kỷ yếu hội nghị Khoa học Quốc gia lần thứ IX "Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng Công nghệ Thông tin (FAIR'9)"; Cần Thơ, ngày 4-5/8/2016; DOI: 10.1562/vap.2016.00034.
- [8] S. Elaydi, An Introduction to Difference Equations, Springer Science+Business Media, Inc, 2005.
- [9] A. Iggidr, M. Bensoubaya, New Results on the Stability of Discrete-Time Systems and Applications to Control Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 219 (1998), pp. 392-414.
- [10] R. E. Mickens, Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations, WorldScientific, Singapore, (1994).
- [11] R. E. Mickens, Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes, World Scientific, Singapore, (2000).
- [12] R. E. Mickens, Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes, World Scientific, Singapore, New Jersey, 2005.
- [13] R. E. Mickens, Nonstandard Finite Difference Schemes for Differential Equations, Journal of Difference Equations and Applications, 8(9) (2005), pp. 823-847.
- [14] W. H. Murray, The application of epidemiology to computer viruses. Comput Secur 1988;7(2):130-50.
- [15] K. C. Partidar, Nonstandard finite difference methods: recent trends and further developments, Journal of Difference Equations and Applications, 22 (2016), pp. 817-849.
- [16] P. Szor, The art of computer virus research and defense. 1st ed. Addison-Wesley Education Publishers Inc, 2005.
- [17] L-X. Yang, X. Yang, Q. Zhu, L. Wen, A computer virus model with graded cure rates, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 14 (2013), pp. 414-422.
- [18] L-X. Yang, X. Yang, A new epidemic model of computer viruses, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 19 (2014) 1935-1944.
- [19] L-X. Yang, X. Yang, Towards the epidemiological modeling of computer viruses. Discrete Dyn Nat Soc 2012; 2012 (Article ID 259671).
- [20] X. Yang, B. K. Mishra, Y. Liu, Computer virus: theory, model, and methods. Discrete Dyn Nat Soc 2012; 2012 (Article ID 473508).
- [21] L-X. Yang, X. Yang, L. Wen, J. Liu, A novel computer virus propagation model and its dynamics. Int J Comput Math 2012; 89(17):2307-2314.

NONSTANDARD FINITE DIFFERENCE SCHEMES FOR NUMERICAL SIMULATION OF A COMPUTER VIRUS PROPAGATION MODEL

Hoang Manh Tuan, Dang Quang A

ABSTRACT: *In this paper, nonstandard finite difference (NSFD) schemes which preserve the essential properties of a computer virus propagation model are constructed. The essential properties of this model are: positivity and boundedness of the solution, equilibria and their stability properties. Here, the stability properties of the discrete models are investigated by the use of a generalization of the Lyapunov stability theorem. Some performed numerical simulations confirmed the validity of the obtained theoretical results and the advantages of the NSFD schemes over the standard ones.*