Kỷ yếu Hội nghị Quốc gia lần thứ X về Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng Công nghệ thông tin (FAIR), Đà Nẵng, ngày 17-18/08/2017
DOI: 10.15625/vap.2017.00047

MẠNG ĐA HÀNG HÓA ĐA CHI PHÍ TUYẾN TÍNH MỞ RỘNG VÀ BÀI TOÁN TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI

Trần Quốc Chiến[1], Hồ Văn Hùng[2]

[1] *Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng*

[2] *Trường Đại học Quảng Nam*

tqchien@dce.udn.vn, hovanhung@qnamuni.edu.vn

TÓM TẮT: *Đồ thị là công cụ toán học hữu ích ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như giao thông, truyền thông, công nghệ thông tin, kinh tế,…. Cho đến nay, phần lớn các ứng dụng trong đồ thị mới chỉ xét đến trọng số của các cạnh, các đỉnh một cách độc lập, trong đó độ dài đường đi là tổng trọng số các cạnh và các đỉnh trên đường đi đó. Tuy nhiên, trong thực tế, trọng số tại một đỉnh không giống nhau với mọi đường đi qua đỉnh đó, mà còn phụ thuộc vào cạnh đi đến và cạnh đi khỏi đỉnh đó. Công trình [2] đề xuất chi phí chuyển làn (switch cost) cho đồ thị có hướng. Các công trình [3-6] nghiên cứu các bài toán luồng đa hàng hóa đơn chi phí tuyến tính trên mạng truyền thống. Các công trình [7-11] nghiên cứu các bài toán luồng đa hàng hóa đơn chi phí tuyến tính trên mạng mở rộng, trong đó chi phí chuyển làn được định nghĩa cho đồ thị hỗn hợp. Bài viết xây dựng mô hình mạng đa hàng hóa đa chi phí mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và hiệu quả hơn. Bài toán luồng đa hàng hóa đa chi phí tuyến tính cực đại được mô hình hóa bằng bài toán quy hoạch tuyến tính ẩn. Trên cơ sở lý thuyết đối ngẫu trong quy hoạch tuyến tính, một thuật toán xấp xỉ có độ phức tạp đa thức được phát triển.*

Từ khóa: *đồ thị, mạng, luồng đa hàng hóa đa chi phí, tối ưu, quy hoạch tuyến tính.*

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Mạng và luồng trên mạng là công cụ toán học hữu ích ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như giao thông, truyền thông, công nghệ thông tin, kinh tế,…. Cho đến nay phần lớn các ứng dụng trong đồ thị mới chỉ xét đến trong mạng cổ điển mới chỉ xét đến trọng số của các tuyến và các nút một cách độc lập, trong đó độ dài đường đi chỉ đơn thuần là tổng trọng số các cạnh và các nút trên đường đi đó. Tuy nhiên, trong nhiều bài toán thực tế, trọng số tại một nút không giống nhau với mọi đường đi qua nút đó, mà còn phụ thuộc vào tuyến đi đến và tuyến đi khỏi nút đó. Ví dụ thời gian đi qua ngã tư trên mạng giao thông phụ thuộc vào hướng di chuyển của phương tiện giao thông: rẽ phải, đi thẳng hay rẽ trái, thậm chí có hướng bị cấm. Công trình [2] đề xuất chi phí chuyển làn (switch cost) cho đồ thị có hướng. Vì vậy cần xây dựng một mô hình mạng mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và hiệu quả hơn. Các bài toán luồng đa hàng hóa đơn chi phí tuyến tính trên mạng giao thông truyền thống đã được nghiên cứu trong các công trình [3-6]. Các bài toán luồng đa hàng hóa đơn chi phí tuyến tính trên mạng giao thông mở rộng được nghiên cứu trong các công trình [7-11].

Bài viết xây dựng mô hình mạng đa hàng hóa đa chi phí mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và hiệu quả hơn. Bài toán luồng đa hàng hóa đa chi phí tuyến tính cực đại được mô hình hóa bằng bài toán quy hoạch tuyến tính ẩn. Trên cơ sở lý thuyết đối ngẫu trong quy hoạch tuyến tính, một thuật toán xấp xỉ có độ phức tạp đa thức được phát triển.

II. MẠNG ĐA HÀNG HÓA ĐA CHI PHÍ TUYẾN TÍNH MỞ RỘNG

Cho đồ thị hỗn hợp $G=(V, E)$ với tập nút V và tập cạnh E. Các cạnh có thể có hướng hoặc vô hướng. Ký hiệu E_v là tập cạnh và cung liên thuộc đỉnh $v\in V$. Có nhiều loại hàng hóa lưu hành trên mạng. Các loại hàng hóa cùng chia sẻ khả năng thông hành của các tuyến, nhưng có chi phí khác nhau. Những cạnh vô hướng biểu diễn tuyến hai chiều, trong đó các loại hàng hóa trên cùng tuyến nhưng ngược hướng lưu hành chia sẻ khả năng thông hành của tuyến.

Ký hiệu r là số loại hàng hóa, $q_i > 0$ là hệ số quy đổi thông hành của loại hàng hóa i, $i =1..r$.

Cho các hàm sau.

Hàm khả năng thông hành cạnh ce: $E\rightarrow R^*$, với $ce(e)$ là khả năng thông hành cạnh $e\in E$.

Hàm hệ số phục vụ cạnh ze: $E\rightarrow R^*$, với $ze(e)$ là tỉ lệ thông hành cạnh $e\in E$.

Hàm khả năng thông hành nút cv: $V\rightarrow R^*$, với $cv(u)$ là khả năng thông hành nút $u\in V$.

Hàm hệ số phục vụ nút zv: $V\rightarrow R^*$, với $zv(v)$ là tỉ lệ thông hành nút $v\in V$.

Bộ (V, E, ce, ze, cv, zv) gọi là *mạng mở rộng*.

Hàm chi phí cạnh hàng hóa i, $i=1..r$, be_i: $E\rightarrow R^*$, với $be_i(e)$ là chi phí phải trả để chuyển một đơn vị hàng hóa loại i quy đổi qua cạnh e. Lưu ý rằng với những tuyến hai chiều thì chi phí hai hướng có thể khác nhau.

Với mỗi nút $v \in V$, ký hiệu E_v là tập các cạnh liên thuộc nút v.

Hàm chi phí chuyển nhánh hàng hóa i, $i=1...r$, $bv_i: V \times E_v \times E_v \to R^*$, với $bv_i(u,e,e')$ là chi phí phải trả để chuyển một đơn vị hàng hóa loại i quy đổi từ cạnh e qua nút u sang cạnh e'.

Bộ $(V, E, ce, ze, cv, zv, \{be_i, bv_i, q_i \mid i=1...r\})$ gọi là *mạng đa hàng hóa đa chi phí tuyến tính mở rộng*.

◊ *Lưu ý*: Nếu $be_i(e)=\infty$, thì hàng hóa loại i bị cấm lưu hành trên tuyến e. Nếu $bv_i(u,e,e')=\infty$, thì hàng hóa loại i bị cấm lưu hành từ tuyến e qua nút u sang tuyến e'.

Cho p là đường đi từ nút u đến nút v qua các cạnh e_j, $j=1...(h+1)$, và các nút u_j, $j=1...h$, như sau:

$p = [u, e_1, u_1, e_2, u_2, \ldots, e_h, u_h, e_{h+1}, v]$

Định nghĩa *chi phí lưu hành* một đơn vị hàng hóa loại i, $i=1...r$, qua đường đi p, ký hiệu $b_i(p)$, theo công thức sau:

$$b_i(p) = \sum_{j=1}^{h+1} be_i(e_j) + \sum_{j=1}^{h} bv_i(u_j, e_j, e_{j+1}) \tag{1}$$

III. LUỒNG ĐA HÀNG HÓA TRÊN MẠNG ĐA HÀNG HÓA ĐA CHI PHÍ TUYẾN TÍNH MỞ RỘNG

Cho mạng đa hàng hóa đa chi phí tuyến tính mở rộng $G=(V,E, ce, ze, cv, zv, \{be_i, bv_i, q_i \mid i=1...r\})$. Giả thiết với mỗi loại hàng hóa i, $i=1...r$, có k_i cặp nút nguồn-đích $(s_{i,j}, t_{i,j})$, $j=1...k_i$, mỗi cặp được gán một lượng hàng hóa loại i, cần chuyển từ nút nguồn $s_{i,j}$ đến nút đích $t_{i,j}$.

Ký hiệu $P_{i,j}$ là tập hợp các đường đi từ nút $s_{i,j}$ đến nút $t_{i,j}$ trong G có thể lưu hành hàng hóa loại i, $i=1...r$, $j=1...k_i$

Đặt

$$P_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} P_{i,j} .$$

Với mỗi đường đi $p \in P_{i,j}$, $i=1...r$, $j=1...k_i$, ký hiệu biến $x_{i,j}(p)$ là luồng hàng hóa loại i quy đổi lưu hành từ nút nguồn $s_{i,j}$ đến nút đích $t_{i,j}$ dọc theo đường đi p, $i=1...r$, $j=1...k_i$.

Ký hiệu $P_{i,e}$ là tập hợp các đường đi trong P_i đi qua cạnh e, $\forall e \in E$.

Ký hiệu $P_{i,v}$ là tập hợp các đường đi trong P_i đi qua nút v, $\forall v \in V$.

Tập hợp

$$F = \{x_{i,j}(p) \mid p \in P_{i,j}, i=1...r, j=1...k\ \}$$

gọi là *luồng đa hàng hóa* trên mạng đa hàng hóa đa chi phí tuyến tính mở rộng, nếu thỏa mãn các *ràng buộc về khả năng thông hành* trên cạnh và nút sau:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{p \in P_{i,e}} x_{i,j}(p) \le ce(e).ze(e),\ \forall e \in E.$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{p \in P_{i,v}} x_{i,j}(p) \le cv(v).zv(v),\ \forall v \in V.$$

Biểu thức

$$fv_{i,j} = \sum_{p \in P_{i,j}} x_{i,j}(p),\ i=1..r,\ j=1...k_i..$$

gọi là *giá trị luồng hàng hóa loại i của cặp nguồn-đích* $(s_{i,j}, t_{i,j})$ của F,

$$fv_i = \sum_{j=1}^{k_i} fv_{i,j}\ ,\ i=1..r$$

gọi là *giá trị luồng của loại hàng hóa i của F*,

$$fv = \sum_{i=1}^{r} fv_i$$

gọi là *giá trị luồng của F*.

IV. BÀI TOÁN LUỒNG ĐA HÀNG HÓA CỰC ĐẠI

Cho mạng đa hàng hóa đa chi phí mở rộng G=(V,E, ce, ze, cv, zv, $\{be_i$, bv_i, q_i $|i$=1...$r\}$). Giả thiết với mỗi loại hàng hóa i, i=1...r, có k_i cặp nút nguồn-đích ($s_{i,j}$, $t_{i,j}$), j=1...k_i, mỗi cặp được gán một lượng hàng hóa loại i, cần chuyển từ nút nguồn $s_{i,j}$ đến nút đích $t_{i,j}$.

Nhiệm vụ của bài toán là tìm luồng đa hàng hóa sao cho giá trị luồng fv là lớn nhất.

Bài toán được biểu diễn bằng mô hình qui hoạch tuyến tính ẩn (P) như sau:

$$fv = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{p\in P_{i,j}} x_{i,j}(p) \to max$$

thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{p\in P_{i,e}} x_{i,j}(p) \le ce(e).ze(e),\ \forall e\in E$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{p\in P_{i,v}} x_{i,j}(p) \le cv(v).zv(v),\ \forall v\in V$$

$$x_{i,j}(p) \ge 0,\ \forall i=1..r,\ j=1..k_i,\ \forall p\in P_i$$

Bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu với (P), gọi là (D), được xây dựng như sau: mỗi cạnh $e\in E$ được gán một biến đối ngẫu $le(e)$, mỗi nút $v\in V$ được gán một biến đối ngẫu $lv(v)$. Bài toán (D) phát biểu như sau

$$D(le,lv) = \sum_{e\in E} ce(e).ze(e).le(e) + \sum_{v\in V} cv(v).zv(v).lv(v) \to min$$

$$\sum_{e\in p} le(e) + \sum_{v\in p} lv(v) \ge 1,\ \forall p\in P$$

$$le(e) \ge 0,\ \forall e\in E,\ lv(v) \ge 0,\ \forall v\in V$$

Bây giờ, cho $p\in P_i$, i=1…r, là đường đi từ nút u đến nút v qua các cạnh e_j, j=1..(h+1), và các nút u_j, j=1...h, như sau:

$$p = [u, e_1, u_1, e_2, u_2, \ldots, e_h, u_h, e_{h+1}, v].$$

Ta định nghĩa độ dài đường đi p, ký hiệu $length_i(p)$, phụ thuộc các biến $le(e)$, $lv(v)$ theo công thức sau:

$$length_i(p) = \sum_{j=1}^{h+1} le(e_j) + \sum_{j=1}^{h} lv(u_j).$$

Ký hiệu $dist_{i,j}(le,lv)$ là độ dài đường đi ngắn nhất từ $s_{i,j}$ đến $t_{i,j}$ tính theo hàm độ dài $length_i(p)$, $\forall i$=1...r, $\forall j$=1...k_i.

Đặt $\alpha(le,lv) = \min\{dist_{i,j}(le,lv) \mid i=1...r,\ j=1...k_i\}$

Xét bài toán (D_α):

$$\beta = \min\left\{ \frac{D(le,lv)}{\alpha(le,lv)} \middle| le: E\to R^*, lv: V\to R^* \right\}.$$

• ***Bổ đề* 4.1.** Bài toán (D) tương đương với bài toán (D_α) theo nghĩa trị tối ưu của chúng bằng nhau và từ nghiệm tối ưu của bài toán này suy ra nghiệm tối ưu của bài toán kia và ngược lại.

Chứng minh

Ký hiệu $min(D)$ và $min(D_\alpha)$ tương ứng là trị tối ưu của bài toán (D) và bài toán (D_α). Cho hàm le: $E\to R^*$, lv:$V\to R^*$. Đặt

$$le'(e) = le(e)/\alpha(le,lv)\ \forall e\in E,\ lv'(v) = lv(v)/\alpha(le,lv)\ \forall v\in V.$$

Ta có

$$\sum_{e\in p} le'(e) + \sum_{v\in p} lv'(v) \geq 1, \forall i=1...r,\ \forall j=1...k_i, \forall p\in P_{i,j}$$

Vậy (le', lv') là phương án chấp nhận của (D) và $D(le',lv') = \dfrac{D(le,lv)}{\alpha(le,lv)}$.

Từ đó suy ra

$$min(D) \leq min(D_\alpha). \qquad (2).$$

Ngược lại, cho (le,lv) là phương án chấp nhận của (D). Khi đó, ta có

$1 \leq dist_{i,j}(le,lv), \forall i=1...r, \forall j=1...k_i \Rightarrow \alpha(le,lv) \geq 1$, kéo theo $\dfrac{D(le,lv)}{\alpha(le,lv)} \leq D(le,lv)$, từ đó suy ra

$$min(D) \geq min(D_\alpha). \qquad (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra $min(D) = min(D_\alpha)$.

Tiếp theo, nếu (le,lv) là nghiệm tối ưu của bài toán (D_α), thì (le',lv'), trong đó

$$le'(e) = le(e) / \alpha(le,lv)\ \forall e\in E,\ lv'(v) = lv(v) / \alpha(le,lv)\ \forall v\in V,$$

là nghiệm tối ưu của bài toán (D).

Ngược lại, nếu (le,lv) là nghiệm tối ưu của bài toán (D), thì (le,lv) là nghiệm tối ưu của bài toán (D_α).

V. THUẬT TOÁN

• ***Ý tưởng thuật toán***

Thuật toán gồm một số bước lặp, thông qua hàm độ dài $length_i(p)$, $p\in P_i$, $i=1...r$. Tại mỗi bước lặp, tìm ra một đường p ngắn nhất (tính theo $length_i(p)$) giữa các cặp nguồn-đích và chuyển c đơn vị hàng hóa quy đổi qua đường này, với c khả năng thông hành cạnh, đỉnh tối thiểu trên đường này.

Sau đó thay đổi giá trị các hàm le, lv và α. Thuật toán dừng lại một khi $\alpha \geq 1$. Giá trị ban đầu của le, lv và α phụ thuộc vào giá trị xấp xỉ cần đạt được.

• ***Thuật toán***

◊ ***Đầu vào***: Mạng đa hàng hóa đa chi phí mở rộng $G=(V,E, ce, ze, cv, zv, \{be_i, bv_i, q_i \mid i=1…r\})$. Giả thiết với mỗi loại hàng hóa i, $i=1...r$, có k_i cặp nút nguồn-đích $(s_{i,j}, t_{i,j})$, $j=1...k_i$, mỗi cặp được gán một lượng hàng hóa loại i, cần chuyển từ nút nguồn $s_{i,j}$ đến nút đích $t_{i,j}$.

Ký hiệu $n=|V|$, $m=|E|$ và ω là tỉ lệ xấp xỉ cần đạt được.

◊ ***Đầu ra***: Luồng cực đại F biểu diễn dạng tập hợp luồng quy đổi tại các cạnh

$F = \{x_{i,j}(e) \mid e\in E, i=1...r, j=1...k_i\}$

◊ ***Các bước***:

Bước 1: Tính ε và δ theo hệ số xấp xỉ ω (giá trị ε và δ xác định ở phần chứng minh sau):

$$\varepsilon = 1-\sqrt{1/(1+\omega)} \text{ và } \delta = (1+\varepsilon)\frac{1}{\left[(1+\varepsilon)^2(m+n)\right]^{1/\varepsilon}}.$$

Bước 2: Khởi gán: $le(e)=\delta$; $x_{i,j}(e)=0$, $\forall e\in E$, $lv(v)=\delta$, $\forall v\in V$, $fv=0$;

Bước 3: Tìm cặp nút nguồn-đích $(s_{i,j}, t_{i,j})$, $1\leq i\leq r$ và $1 \leq j\leq k_i$, có đường đi ngắn nhất từ $s_{i,j}$ đến $t_{i,j}$ tính theo hàm độ dài $length_i(.)$.Chú ý đường đi p phải hợp lệ với hàng hóa loại i, tức không chứa cạnh có chi phí ∞ hoặc nút có chi phí chuyển nhánh ∞. Giả sử

$$\alpha(le,lv) = \min\{dist_{i,j}(le,lv) \mid i=1..r, j=1..k_i\} = dist_{imin,jmin}(le,lv)$$

Ký hiệu p, α và c tương ứng là đường đi ngắn nhất, độ dài ngắn nhất và khả năng thông hành cạnh, đỉnh tối thiểu của p, tức là

c=min{min{$ce(e).ze(e)|e\in p$},min{ $cv(v).zv(v)|v\in p$}}

Bước 4: Điều chỉnh luồng:

$\forall e \in p$, $x_{imin,jmin}(e)= x_{imin,jmin}(e)+c$; $fv=fv+c$; $le(e)= le(e).(1+\varepsilon.c/(ce(e).ze(e)))$;

$\forall v\in p$, $lv(v)= lv(v).(1+\varepsilon.c/(cv(v).zv(v)))$;

Bước 5: Nếu $\alpha \geq 1$ qua bước 6, ngược lại quay về bước 3.

Bước 6: Xử lí giá trị kết quả đạt được của luồng F và giá trị luồng fv. ***Kết thúc.***

- ***Chứng minh thuật toán***

Ký hiệu $D(0)$ là giá trị ban đầu của hàm D

$$D(0) = \sum_{e\in E} ce(e).ze(e).\delta + \sum_{v\in V} cv(v).zv(v).\delta = \delta(\sum_{e\in E} ce(e).ze(e) + \sum_{v\in V} cv(v).zv(v))$$

$D(i)$ là giá trị hàm D sau vòng lặp thứ i, i=1, 2,...

$fv(0) = 0$ là giá trị ban đầu của luồng F.

$fv(i)$ là giá trị của luồng F sau vòng lặp i, i=1, 2,...

le_i, lv_i là hàm le, lv ở vòng lặp thứ i. i=1, 2,...

p_i là đường đi ngắn nhất p ở vòng lặp thứ i. i=1, 2,...

$\alpha(i) = \alpha(le_i,lv_i)$, i=1, 2,...

$c(i)$ là giá trị c ở vòng lặp thứ i. i=1, 2,...

Ta có

$fv(j) = fv(j-1) + c(j)$,

$$D(j) = \sum_{e\in E} ce(e).ze(e).le_j(e) + \sum_{v\in V} cv(v).zv(v).lv_j(v)$$

$$= \sum_{e\in E} ce(e).ze(e).le_{j-1}(e) + \sum_{v\in V} cv(v).zv(v).lv_{j-1}(v) + \sum_{e\in p_j} \varepsilon.c(j)le_{j-1}(e) + \sum_{v\in p_j} \varepsilon.c(j)lv_{j-1}(v)$$

$$= D(j-1) + \varepsilon.c(j).(\sum_{e\in p_j} le_{j-1}(e) + \sum_{v\in p_j} lv_{j-1}(v))$$

$$= D(j-1) + \varepsilon.c(j).\alpha(j-1).$$

Suy ra

$$D(i) = D(0)+\varepsilon\sum_{j=1}^{i}\left(fv(j) - fv(j-1)\right)\alpha(j-1),\ \forall i\geq 1. \quad (4)$$

Xét hàm le_i-le_0 và lv_i-lv_0. Ta có

$D(le_i-le_0,lv_i-lv_0)=D(i) - D(0)$ và $\alpha(le_i-le_0,lv_i-lv_0) \geq \alpha(i) - \delta.(m+n)$.

Ký hiệu i_0 là chỉ số nhỏ nhất thỏa mãn

$\alpha(i_0) \geq \delta.(m+n)$ và $\alpha(i_0-1) < \delta.(m+n)$.

Mặt khác, ta có

$le_i(e) \leq le_{i-1}(e).(1+\varepsilon.c(j) /(ce(e).ze(e))) \leq le_{i-1}(e).(1+\varepsilon)$, $\forall e\in E$, $\forall i \geq 1$

$lv_i(v) \leq lv_{i-1}(v).(1+\varepsilon.c(j) /(cv(v).zv(v))) \leq lv_{i-1}(v).(1+\varepsilon)$, $\forall v\in V$, $\forall i \geq 1$

$\Rightarrow \alpha(i) \leq (1+\varepsilon).\alpha(i-1)$, $\forall i \geq 1$.

Suy ra

$\alpha(i_0) \leq (1+\varepsilon).\alpha(i_0-1) < (1+\varepsilon).\delta.(m+n)$.

Khi đó, ta có

$$\Rightarrow \qquad \beta \le \frac{D(le_i - le_0, lv_i - lv_0)}{\alpha(le_i - le_0, lv_i - lv_0)} \le \frac{D(i) - D(0)}{\alpha(i) - \delta(m+n)}, \ \forall i \ge i_0 + 1. \tag{5}$$

Thay giá trị $D(i)$–$D(0)$ từ (4) vào (5), ta được:

$$\alpha(i) \le \delta.(m+n) + \frac{\varepsilon}{\beta} \sum_{j=1}^{i} \big(fv(j) - fv(j-1)\big)\alpha(j-1), \ \forall i \ge i_0 + 1.$$

Ta định nghĩa truy hồi dãy $x(0), x(1), ..., x(i), ...$ như sau:

$$x(i_0) = \alpha(i_0) \text{ và } x(i) = \delta.(m+n) + \frac{\varepsilon}{\beta} \sum_{j=1}^{i} \big(fv(j) - fv(j-1)\big)x(j-1), \ \forall i \ge i_0 + 1.$$

Quy nạp suy ra $\alpha(i) \le x(i)$, $\forall i \ge i_0 + 1$.

Ta có

$$x(i) = \delta(m+n) + \frac{\varepsilon}{\beta} \sum_{j=1}^{i-1} \big(fv(j) - fv(j-1)\big)x(j-1) + \frac{\varepsilon}{\beta}(fv(i) - fv(i-1))x(i-1)$$

$$= x(i-1)\,(1+\varepsilon.(fv(i) - fv(i-1))/\beta) \le x(i-1)\,e^{\varepsilon(fv(i)-fv(i-1))/\beta} \le x(i-2)\,e^{\varepsilon(fv(i)-fv(i-2))/\beta} \le \dots$$

$$\le x(i_0)\,e^{\varepsilon.(fv(i)-fv(i_0))/\beta} \le \alpha(i_0).\,e^{\varepsilon.fv(i)/\beta} \le (1+\varepsilon).\delta.(m+n)\ e^{\varepsilon.fv(i)/\beta}, \text{ vì } \alpha(i_0) \le (1+\varepsilon).\delta.(m+n).$$

Suy ra $\alpha(i) \le (1+\varepsilon).\delta.(m+n)\ e^{\varepsilon.fv(i)/\beta}$, $\forall i \ge i_0 + 1$.

Giả sử thuật toán kết thúc ở vòng lặp t, tức là $\alpha(t) \ge 1$. Khi đó

$$1 \le (1+\varepsilon).\delta.(m+n)\,e^{\varepsilon.fv(t)/\beta} \tag{6}$$

kéo theo

$$\frac{\beta}{fv(t)} \le \frac{\varepsilon}{\ln \dfrac{1}{(1+\varepsilon).\delta.(m+n)}} \tag{7}$$

***Bổ đề* 5.1.** Tồn tại luồng chấp nhận với giá trị $\dfrac{fv(t)}{\log_{1+\varepsilon} \dfrac{1+\varepsilon}{\delta}}$.

Chứng minh. Xét một cạnh e bất kì. Ta có:

Cứ mỗi lần chuyển $ce(e)ze(e)$ đơn vị hàng hóa quy đổi qua cạnh e thì độ dài $le(e)$ của e tăng lên một thừa số ≥ $(1+\varepsilon)$. Thật vậy, ở mỗi lần lặp ta chỉ chuyển $c \le ce(e)ze(e)$ đơn vị hàng hóa qua e, để chuyển qua e một lượng hàng là $ce(e)ze(e)$ thì phải chuyển ít nhất một lần. Giả sử lúc bắt đầu xét là bước lặp thứ i. Gọi q là số lần lặp để chuyển qua e được $ce(e)ze(e)$ đơn vị hàng hóa. Ký hiệu c_j là giá trị c ở lần chuyển thứ j, j=1...q. Ký hiệu l là bước lặp cuối chuyển c_q đơn vị hàng hóa qua e. Ta có

$$le_l(e) = le_i(e).\left(1+\varepsilon.\frac{c_1}{ce(e)ze(e)}\right)\dots\left(1+\varepsilon.\frac{c_q}{c(e)ze(e)}\right) = le_i(e).\left(1+\big(c_1+\dots+c_q\big).\frac{\varepsilon}{c(e)ze(e)}+\dots\right)$$

Lúc này ta có

$$\sum_{j=1}^{q} c_j \ge ce(e)ze(e).$$

Vậy

$$le_l(e) \ge (1+\varepsilon).le_i(e).$$

Gọi $x(e)$ là tổng luồng chuyển qua e. Đặt

$x(e) = h.ce(e)ze(e),\ h\in R^*$.

Vậy có h lần chuyển $ce(e)ze(e)$ đơn vị hàng hóa qua e, lúc này độ dài của e là $le_t(e) \geq (1+\varepsilon)^h.le_0(e)$ (8)

Kí hiệu j, $j<t$, là lần lặp cuối $le(e)$ tăng. Khi đó $le_j(e) < 1$, (vì nếu $le_j(e) \geq 1$, thì $\alpha(j) \geq 1$ và thuật toán đã dừng lại ở bước $j<t$). Suy ra

$$le_t(e) \leq (1+\varepsilon).le_j(e) < (1+\varepsilon). \tag{9}$$

Từ (8), (9) và $le_0(e) = \delta$ suy ra

$$(1+\varepsilon)^h.le_0(e) \leq le_t(e) < (1+\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad h < \log_{1+\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{\delta}.$$

Như vậy,

$$x(e) \leq ce(e)ze(e).\log_{1+\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{\delta},\ \forall e\in E.$$

Tương tự, ta cũng có

$$x(v) \leq cv(v).zv(v).\log_{1+\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{\delta},\ \forall v\in V$$

với $x(v)$ là tổng luồng qua đỉnh $v\in V$.

Như vậy, ở bước 6, Chia tất cả các luồng $x_{i,j}(e)$ cho $\log_{1+\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{\delta}$:

$$x_{i,j}(e)=x_{i,j}(e)/\log_{1+\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{\delta},\ \forall i=1..r, j=1..k_i, \forall e\in E,$$

ta nhận được luồng chấp nhận, thỏa mãn các điều kiện về khả năng thông hành cạnh và đỉnh, với giá trị luồng là $\dfrac{fv(t)}{\log_{1+\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{\delta}}$.

***Bổ đề* 5.2.** Luồng với giá trị $\dfrac{fv(t)}{\log_{1+\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{\delta}}$ đạt cực đại với tỉ số xấp xỉ $1+\omega$ $(0<\omega<1)$.

Chứng minh.

Ký hiệu γ là tỉ số trị tối ưu bài toán đối ngẫu chia cho giá trị luồng

$\{x_{i,j}(e) \mid e\in E, i=1...r, j=1...k_i\}$

Ta có

$$\gamma = \frac{\beta}{fv(t)}.\log_{1+\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{\delta}.$$

Sử dụng (7) ta có

$$\gamma \leq \frac{\varepsilon}{\ln\dfrac{1}{(1+\varepsilon).\delta.(m+n)}}.\log_{1+\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon)}.\frac{\ln\dfrac{1+\varepsilon}{\delta}}{\ln\dfrac{1}{(1+\varepsilon).\delta.(m+n)}}.$$

Chọn $\delta = (1+\varepsilon)\dfrac{1}{\left[(1+\varepsilon)^2(m+n)\right]^{1/\varepsilon}}$. Ta có

$$\frac{\ln\frac{1+\varepsilon}{\delta}}{\ln\frac{1}{(1+\varepsilon).\delta.(m+n)}} = (1-\varepsilon)^{-1} \Rightarrow \gamma \le \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\ln(1+\varepsilon)} \le \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)(\varepsilon-\varepsilon^2/2)} \le \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}$$

Vậy $1 < \gamma \le \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}$. Để có tỉ số xấp xỉ $(1+\omega)$, ta chọn ε sao cho $\frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \le (1+\omega)$. Như vậy, với

$$0 < \varepsilon \le 1-\sqrt{1/(1+\omega)},$$

luồng với giá trị $\frac{fv(t)}{\log_{1+\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{\delta}}$ đạt cực đại với tỉ số xấp xỉ $1+\omega$.

• *Ghi chú*. Từ luồng quy đổi

$$\{x_{i,j}(e) \mid e\in E, i=1...r, j=1...k_i\}$$

ta có thể suy ra luồng thực tế bằng cách chia luồng quy đổi $x_{i,j}(e)$ cho hệ số quy đổi q_i, $\forall i=1...r, j=1...k_i, \forall e\in E$.

VI. THỜI GIAN THỰC HIỆN

Định lí 6.1. Thuật toán có độ phức tạp là

$$O(\omega^{-2}.k.n^3.(m+n).\ln(m+n)),$$

trong đó $k=k_1+\ldots+k_r$, m là số cạnh đồ thị, n là số đỉnh đồ thị.

Chứng minh. Xét bước lặp thứ i. Giả sử e là cạnh có khả năng thông qua $ce(e)ze(e)=c(i)$ nhỏ nhất dọc theo đường ngắn nhất p_i. Ta tăng độ dài $le_i(e)$ của e một thừa số $(1+\varepsilon)$. Xét cạnh e bất kì, gọi te là số bước lặp mà trong đó e là cạnh có khả năng thông qua cực tiểu trên đường được chọn tương ứng. Do $le_0(e)=\delta$ và $le_t(e)<1+\varepsilon$, suy ra

$$le_0(e).(1+\varepsilon)^{te} = \delta.(1+\varepsilon)^{te} \le le_t(e)<1+\varepsilon, \text{ kéo theo } te < \log_{1+\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{\delta}.$$

Mặt khác

$$\delta = (1+\varepsilon)((1+\varepsilon)(m+n)^{-1/\varepsilon} \Rightarrow te \le \frac{1}{\varepsilon}(1+\log_{1+\varepsilon}(m+n)) \le \frac{1}{\varepsilon.\ln(1+\varepsilon)}(\ln(1+\varepsilon)+\ln(m+n)).$$

Đặt

$$t^* = \frac{1}{\varepsilon.\ln(1+\varepsilon)}(\ln(1+\varepsilon)+\ln(m+n)).$$

Khi đó, mỗi cạnh $e\in E$ tương ứng với nhiều nhất t^* lần tìm đường ngắn nhất.

Tương tự, mỗi đỉnh $v\in V$ tương ứng với nhiều nhất t^* lần tìm đường ngắn nhất.

Vậy số lần tìm đường ngắn nhất $\le (m+n).t^*$. Mặt khác, thuật toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh nguồn đích có độ phức tạp $O(n^3)$ [7, 8], suy ra thuật toán tìm đường đi ngắn nhất giữa k cặp đỉnh nguồn đích có độ phức tạp $O(k.n^3)$. Suy ra độ phức tạp của thuật toán là

$$O(k.n^3).O((m+n).\frac{\ln(m+n)}{\varepsilon.\ln(1+\varepsilon)}) \quad (10)$$

Mặt khác, vì $\varepsilon \le 1-\sqrt{1/(1+\omega)}$, ta có

$$\varepsilon.\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon^2 \le (1-\sqrt{1/(1+\omega)})^2 = (1-(1-0.5\omega+o(\omega)))^2 = O(\omega^2) \quad (11)$$

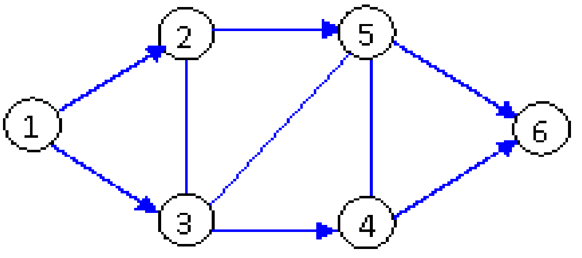
Cuối cùng, từ (9) và (10) suy ra độ phức tạp của thuật toán là

$$O(\omega^{-2}.k.n^3.(m+n).\ln(m+n)),$$

• *Nhận xét*. Đây là bài toán quy hoạch tuyến tính ẩn, trong đó số biến $x(p)$, $p \in P$, bằng lực lượng của P, $|P|=O(k.n!)$. Vì thế, nếu giải bằng các phương pháp giải quy hoạch tuyến tính như thuật toán đơn hình hay thuật toán điểm trong, thì độ phức tạp ít nhất là $O(k.n!)$.

VII. VÍ DỤ

Cho sơ đồ mạng mở rộng ở Hình 1.



Hình 1. Sơ đồ mạng mở rộng

Mạng có 6 nút, 6 cạnh có hướng và 3 cạnh vô hướng.

Dữ liệu cho trong các bảng sau:

Bảng 1. Khả năng thông hành nút

Nút	*cv*
1	100
2	100
3	50
4	100
5	50
6	100

Bảng 2. Hệ số quy đổi hàng hóa

Hàng hóa	q
1	1
2	2
3	3

Bảng 3. Cặp nút nguồn đích

Hàng hóa	$s_{i,j}$	$t_{i,j}$
1	1	5
2	2	4
3	3	6

Bảng 4. Khả năng thông hành và chi phí cạnh

Cạnh	Loại	*ce*	be_1	be_2	be_3
(1,2)	1	50	4	5	6
(1,3)	1	50	4	5	6
(2,3)	0	70	4	5	6
(3,2)	0	70	3	4	5
(2,5)	1	50	∞	5	6
(3,4)	1	50	4	5	6
(3,5)	0	70	4	5	∞
(5,3)	0	70	3	∞	5
(4,6)	1	50	4	5	6
(4,5)	0	70	4	∞	6
(5,4)	0	70	3	5	∞
(5,6)	1	50	4	5	6

Ghi chú. **Loại** 1 là cạnh có hướng, **Loại** 0 là cạnh vô hướng.

Bảng 5. Chi phí rẽ nhánh

Nút	Cạnh 1	Cạnh 2	bv_1	bv_2	bv_3
2	(1,2)	(2,3)	1	2	3
2	(1,2)	(2,5)	1	2	3
2	(3,2)	(2,5)	1	2	3
3	(1,3)	(3,4)	1	2	3
3	(1,3)	(3,5)	1	∞	∞
3	(1,3)	(3,2)	1	∞	∞
3	(5,3)	(3,2)	1	2	3
3	(5,3)	(3,4)	1	2	3
3	(2,3)	(3,4)	1	2	3
3	(2,3)	(3,5)	1	2	3
4	(3,4)	(4,6)	1	2	3
4	(3,4)	(4,5)	1	2	3
4	(5,4)	(4,6)	1	2	3
5	(2,5)	(5,3)	1	∞	∞
5	(2,5)	(5,4)	1	∞	∞
5	(2,5)	(5,6)	1	2	3
5	(3,5)	(5,4)	1	2	3
5	(3,5)	(5,6)	1	2	3
5	(4,5)	(5,3)	1	2	3
5	(4,5)	(5,6)	1	2	3

Thuật toán được cài đặt trong C++.

Sau đây là kết quả chạy chương trình giải bài toán luồng cực đại cho ở trên:

```
He so xap xi: 0.070000,
Tong luong  : 148.908624,
Tong chi phi: 1877.662162
```

Phân luồng cho hàng hóa loại 1 đi từ nguồn 1 đến đích 5:

```
1   2       8.396823
1   3       41.500042
2   3       8.396823
3   5       49.896862
```

Phân luồng cho hàng hóa loại 2 đi từ nguồn 2 đến đích 4:

```
2   3       0.093091
3   4       0.093091
```

Phân luồng cho hàng hóa loại 3 đi từ nguồn 3 đến đích 6:

3	2	49.375553
2	5	49.375553
3	4	49.543118
4	6	49.543118
5	6	49.375553

VIII. KẾT LUẬN

Bài viết xây dựng mô hình mạng đa hàng hóa, đa chi phí mở rộng ở mục 2 và 3 để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và hiệu quả hơn. Tiếp theo, ở mục 4, bài toán luồng đa hàng hóa cực đại được định nghĩa bằng mô hình bài toán quy hoạch tuyến tính (không tường minh). Bài toán đối ngẫu (*D*) của bài toán luồng đa hàng hóa cực đại và bài toán tương đương (D_α) được xây dựng phục vụ cho thuật toán tiếp theo. Trên cơ sở lý thuyết đối ngẫu trong quy hoạch tuyến tính, một thuật toán xấp xỉ có độ phức tạp đa thức được phát triển ở mục 5. Đây cũng là kết quả chính của bài viết. Tính đúng đắn và độ phức tạp thuật toán được chứng minh chính xác. Thuật toán được cài đặt trong C++ và cho kết quả thử nghiệm chính xác. Kết quả của bài viết là cơ sở để nghiên cứu các bài toán luồng đa hàng hóa, đa chi phí tối ưu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Naveen Garg, Jochen Könemann: *Faster and Simpler Algorithms for Multicommodity Flow and Other Fractional Packing Problems, SIAM J. Comput*, Canada, 37(2), 2007, pp. 630-652.

[2] Xiaolong Ma, Jie Zhou: *An Extended Shortest Path Problem with Switch Cost Between Arcs*, Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2008 Vol IIMECS 2008, 19-21 March, 2008, Hong Kong.

[3] Trần Quốc Chiến: *Bài toán mạng giao thông đa phương tiện tuyến tính*, Đề tài NCKH cấp Bộ, mã số B2010DN-03-52.

[4] Trần Quốc Chiến, Trần Thị Mỹ Dung: *Ứng dụng thuật toán tìm đường đi ngắn nhất tìm luồng cực đại đa hàng hóa*. Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà nẵng, 3(44)2011.

[5] Trần Quốc Chiến: *Ứng dụng thuật toán tìm đường đi ngắn nhất đa nguồn đích tìm luồng cực đại đa hàng hóa đồng thời*. Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà nẵng, 4(53)2012.

[6] Trần Quốc Chiến: *Ứng dụng thuật toán tìm đường đi ngắn nhất đa nguồn đích tìm luồng cực đại đa hàng hóa đồng thời chi phí cực tiểu*. Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà nẵng, 5(54)2012.

[7] Trần Quốc Chiến: *Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị tổng quát*, Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng, 12(61)/2012, 16-21.

[8] Trần Quốc Chiến, Nguyễn Mậu Tuệ, Trần Ngọc Việt: *Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị mở rộng*. Proceeding of the 6th National Conference on Fundamental and Applied Information Technology Research (FAIR), Kỷ yếu Hội nghị Khoa học Quốc gia lần thứ VI "Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng CNTT", Huế, 20-21/6/2013. NXB Khoa học tự nhiên và Công nghệ. Hà Nội 2013. p.522-527.

[9] Trần Quốc Chiến: *Ứng dụng thuật toán tìm đường đi nhanh nhất tìm luồng cực đại đa phương tiện tuyến tính đồng thời chi phí cực tiểu trên mạng giao thông mở rộng*, Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng. 10(71)2013, 85-91.

[10] Trần Ngọc Việt, Trần Quốc Chiến, Nguyễn Mậu Tuệ: *Thuật toán phân luồng đa phương tiện tuyến tính tối ưu trên mạng giao thông mở rộng*, Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng. 3(76)2014, 121-124.

[11] Trần Ngọc Việt, Trần Quốc Chiến, Nguyễn Mậu Tuệ: *Bài toán phân luồng giao thông đa phương tiện tuyến tính trên mạng giao thông*. Proceeding of the 7th National Conference on Fundamental and Applied Information Technology Research (FAIR'7), ISBN: 978-604-913-300-8, Kỷ yếu Hội nghị Khoa học Quốc gia lần thứ VII "Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng CNTT", Thái Nguyên, 19-20/6/2014. NXB Khoa học tự nhiên và Công nghệ. Hà Nội 2014. p.31-39.

EXTENDED LINEAR MULTICOMMODITY MULTICOST NETWORK AND MAXIMAL FLOW PROBLEMS

Tran Quoc Chien, Ho Van Hung

ABSTRACT: Graph is a powerful mathematical tool applied in many fields as transportation, communication, informatics, economy,… In ordinary graph the weights of edges and vertexes are considered indepently where the length of a path is the sum of weights of the edges and the vertexes on this path. However, in many practical problems, weights at a vertex are not the same for all paths passing this vertex, but depend on coming and leaving edges. In the article [2], a kind of weights, called switch cost, is defined. The papers [3-6] study multicomodity flow problems in ordinary networks. The papers [7-11] study multicomodity flow problems in extended networks, where switch costs are defined for mixed graphs.The presented paper develops a model of extended linear multicommodity multicost network that can be applied to modelize many practical problems more exactly and effectively. Then, maximal linear multicomodity multicost flow problems are modelized as implicit linear programming problems. On the base of dual theory in linear programming an effective aproximate algorithms is developed.

Keywords: Graph, Network, Multicommodity Multicost Flow, Optimization, Linear Programming.