

# NGHIÊN CỨU SỰ ẢNH HƯỞNG CỦA ĐIỀU KIỆN TÁCH BIỆT TRONG THUẬT TOÁN SINH TÂM THÍCH NGHI CHỖ PHƯƠNG PHÁP KHÔNG LƯỚI RBF-FD GIẢI BÀI TOÁN ELLIPTIC

Đặng Thị Oanh<sup>1</sup>, Ngô Mạnh Tường<sup>1</sup>, Trịnh Minh Đức<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông – Đại học Thái Nguyên

{dtoanh, nmtuong, tmduc} @ictu.edu.vn

**TÓM TẮT:** Sinh tâm thích nghi là quá trình mà các tâm mới sinh ra tập trung tại các vị trí hàm có độ dao động lớn và vị trí miền có hình học phức tạp (góc nhọn). Trong các công bố trước đây của chúng tôi về thuật toán sinh tâm thích nghi, mỗi tâm mới  $\xi'$  được sinh ra nếu thỏa mãn điều kiện tách biệt giữa  $\xi'$  với các tâm nằm trong vùng lân cận của nó [Oleg Davydov and Dang Thi Oanh, Adaptive meshless centers and RBF stencils for Poisson equation, Journal of Computational Physics, 230:287-304, 2011] và [Dang Thi Oanh, Oleg Davydov and Hoang Xuan Phu, Adaptive RBF-FD Method for Elliptic Problems with Point Singularities in 2D, Applied Mathematics and computation, 313: 474-497,2017].

Trong bài báo này chúng tôi tập trung nghiên cứu và khảo sát sự ảnh hưởng của điều kiện tách biệt trong thuật toán sinh tâm thích nghi cho phương pháp không lưới giải bài toán elliptic. Cụ thể là chúng tôi nghiên cứu và khảo sát sự ảnh hưởng của 'độ đo góc đều'  $\mu$  và số tâm  $k_\xi$  gần  $\xi'$  nhất trong điều kiện tách biệt, còn các tham số khác của thuật toán làm mịn và tham số của thuật toán chọn tâm không thay đổi. Kết quả thử nghiệm số cho thấy rằng nghiệm xấp xỉ của phương pháp không lưới RBF-FD có thể cho kết quả chính xác và ổn định nếu chúng ta chọn được các giá trị tham số cho điều kiện tách biệt phù hợp.

**Từ khóa:** RBF-FD, PDE, Dirichlet, bài toán Elliptic, xấp xỉ.

## I. GIỚI THIỆU

Trong bài báo này chúng tôi xét bài toán biên Dirichlet như sau: Tìm  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  sao cho:

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

trong đó,  $L$  là toán tử vi phân tuyến tính elliptic bậc hai; cho trước miền  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , hàm  $f$  được xác định bên trong miền  $\Omega$  và hàm  $g$  được xác định trên biên  $\partial\Omega$  của miền  $\Omega$ .

Để giải số, bài toán (1.1) cần được rời rạc hóa thành hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\sum_{\xi \in \Xi_\zeta} w_{\zeta, \xi} \tilde{u}_\xi = f(\zeta), \quad \zeta \in \Xi_{\text{int}}; \quad u = g(\zeta), \quad \zeta \in \Xi, \quad (1.2)$$

trong đó:

- $\Xi \subset \bar{\Omega}$  là tập hợp các tâm rời rạc và phân bố phân tán;
- $\partial\Xi := \Xi \cap \partial\Omega$  là tập hợp các tâm nằm trên biên;
- $\Xi_{\text{int}} := \Xi \setminus \partial\Xi$  là tập hợp các tâm nằm trong miền;
- $\Xi_\zeta$  là tập hợp các tâm, gồm  $\zeta$  và một vài tâm lân cận  $\xi \in \Xi$  (còn gọi là tập tâm hỗ trợ phương pháp không lưới);
- $w_{\zeta, \xi} \in \mathbb{R}$  là véc tơ trọng số;
- $\tilde{u}$  là nghiệm xấp xỉ.

Độ chính xác của nghiệm xấp xỉ  $\tilde{u}$  trong hệ phương trình (1.2) bằng phương pháp không lưới RBF-FD (Radial Basis Function- finite difference) phụ thuộc vào ba công đoạn chính như sau:

- Công đoạn sinh ra bộ tâm rời rạc  $\Xi$  phù hợp với phương pháp RBF-FD;
- Công đoạn lựa chọn tập hỗ trợ  $\Xi_\zeta$  phù hợp với nội suy RBF;
- Công đoạn xác định véc tơ trọng số  $w_{\zeta, \xi} \in \mathbb{R}$ .

Ba công đoạn trên của phương pháp RBF-FD đã được nghiên cứu trong [2, 3, 4, 5] và các kết quả của phương pháp không lưới RBF-FD có thể so sánh được với phương pháp FEM (Finite Element Method). Trong bài báo này chúng tôi chỉ tập trung vào nghiên cứu sự ảnh hưởng các tham số tạo nên điều kiện tách biệt của thuật toán làm mịn trong [4]. Cụ thể là chúng tôi sẽ nghiên cứu và khảo sát để xác định các giá trị tham số tạo nên sự tách biệt tốt nhất cho mỗi bài toán khi sử dụng phương pháp RBF-FD. Trong các bài báo [2] và [4], một tâm ứng viên  $\xi'$  được chấp nhận nếu nó thỏa mãn điều kiện tách biệt:

$$\text{dist}(\xi', \Xi') \geq \mu \text{sep}_{\xi'}(\Xi'), \quad (1.3)$$

với  $\mu \in (0, 1)$  và

$$sep_{\xi} \Xi' := \frac{1}{k_s} \sum_{i=1}^{k_s} \text{dist}(\xi_i, \Xi \setminus \xi_i), \quad (1.4)$$

trong đó,  $\Xi'$  là bộ tâm rời rạc thuộc miền  $\bar{\Omega}$ ,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k_s}$  là  $k_s$  tâm trong  $\Xi'$  mà gần với  $\xi'$  nhất và  $\text{dist}(x, Y) := \inf \|x - y\|: y \in Y$  là khoảng cách từ điểm  $x$  đến tập  $Y$ . Trong bài báo [4], các nghiệm xấp xỉ trên bộ dữ liệu  $\Xi$  được sinh ra bởi thuật toán làm mịn với bộ các giá trị tham số  $\mu = 0.8$  và  $k_s = 4$ , cho độ chính xác tốt và khá ổn định. Tuy nhiên, giá trị của các tham số này chưa phải là tốt nhất cho mỗi bài toán khác nhau, do đó bài báo này chúng tôi sẽ nghiên cứu, khảo sát sự ảnh hưởng của tham số  $\mu$  trong Công thức (1.3) và tham số  $k_s$  trong Công thức (1.4).

Như đã trình bày ở trên, để so sánh với các kết quả trong bài báo [4], chúng tôi chỉ nghiên cứu sự thay đổi của tham số tạo ra điều kiện tách biệt là  $\mu$  hoặc  $k_s$ . Kết quả thử nghiệm cho thấy chỉ cần thay đổi một trong hai giá trị tham số  $\mu$  hoặc  $k_s$ , ta cũng có thể có kết quả tốt hơn các kết quả đã công bố trong [4].

Bài báo được tổ chức như sau: Sau phần giới thiệu là Phần II trình bày thuật toán sinh tâm thích nghi; Phần III trình bày phương pháp không lưới RBF-FD giải bài toán elliptic; Phần IV trình bày các kết quả thử nghiệm số và Phần cuối cùng dành cho kết luận.

## II. THUẬT TOÁN SINH TÂM THÍCH NGHI

### • Độ lệch (error indicator)

Giả sử  $\tilde{u}$  là nghiệm rời rạc xấp xỉ của bài toán Dirichlet (1.1), trong đó véc tơ nghiệm xấp xỉ này được xác định qua hệ phương trình tuyến tính (1.2). Cho trước tập tâm  $\Xi$ , với mỗi  $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$ , tập  $\Xi_{\zeta} = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k\}$  với  $\xi_0 := \zeta$ , được chọn bởi thuật toán chọn tâm, chẳng hạn Thuật toán 1 trong [2, 4]. Độ lệch (error indicator) được tính như sau: như trong bài báo [4], với mọi  $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$ , độ lệch  $\varepsilon(\zeta, \xi)$  tương ứng với mỗi ‘cạnh’  $\zeta\xi$  được tính bằng cách cho  $\ell_{\zeta} x = a + b^T x - \zeta$  là đa thức tuyến tính mà dữ liệu  $\{(\xi, \tilde{u}_{\xi}): \xi \in \Xi_{\zeta}\}$  theo hướng bình phương tối thiểu, trong đó các hệ số  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^2$  được chọn sao cho

$$\sum_{\xi \in \Xi_{\zeta}} |\tilde{u}_{\xi} - \ell_{\zeta}(\xi)|^2 \rightarrow \min.$$

Chúng tôi thiết lập

$$\varepsilon_{\zeta, \xi} = \varepsilon_{\zeta, \xi} := \left| \tilde{u}_{\zeta} - \tilde{u}_{\xi} - \ell_{\zeta}(\zeta) - \ell_{\zeta}(\xi) \right|, \quad \zeta \in \Xi_{\text{int}}, \xi \in \Xi_{\zeta} \setminus \zeta.$$

### • Chiến lược đánh dấu

Điều kiện một cạnh  $\zeta\xi$  được đánh dấu để làm mịn là  $\varepsilon_{\zeta, \xi} \geq \gamma \bar{\varepsilon}_{\Xi}$ , trong đó

$$\bar{\varepsilon}_{\Xi} := \max_{\zeta \in \Xi_{\text{int}}, \xi \in \Xi_{\zeta}} \varepsilon_{\zeta, \xi}$$

và  $\gamma \in (0, 1)$  là tham số cho trước.

### • Chiến lược làm mịn

Như trong [4], với mỗi cạnh  $\zeta\xi$  được đánh dấu, các tâm ứng viên mới là điểm giữa của cạnh  $\xi_{\text{mid}} := (\zeta + \xi)/2$  và hai điểm lân cận  $\xi_{\text{mid}}^{\pm} := \xi_{\text{mid}} \pm d\bar{v}$ , trong đó  $d = \|\zeta - \xi\|/2$  và  $\bar{v}$  là véc tơ đơn vị vuông góc với cạnh  $\zeta\xi$ , ngoài ra còn 2 tâm ứng viên trên biên nếu tâm  $\xi$  nằm trên biên. Tâm ứng viên  $\xi'$  được chấp nhận nếu nó thỏa mãn điều kiện tách biệt trong bài báo [2, 4] là Công thức (1.3) và (1.4).

### • Thuật toán: Làm mịn không lưới thích nghi

*Input:* Bộ tâm rời rạc  $\Xi$  và các tập hỗ trợ  $\{\Xi_{\zeta}: \zeta \in \Xi_{\text{int}}\}$ .

*Output:*  $\Xi'$  là bộ tâm sau khi được làm mịn.

*Các tham số:*  $\gamma = 0.5$  (độ lệch),  $\mu$  (tách biệt) và  $n = 15$  (phần trăm tâm được thêm vào).

- I. Tính ngưỡng độ lệch  $\bar{\varepsilon} = \gamma \bar{\varepsilon}_{\Xi}$  và ban đầu  $\Xi' := \Xi$ .
- II. Đối với mỗi cạnh  $\zeta\xi, \zeta \in \Xi_{\text{int}}, \xi \in \Xi_{\zeta} \setminus \zeta$  sao cho  $\varepsilon_{\zeta, \xi} \geq \bar{\varepsilon}$ :

1. Tính  $\xi_{\text{mid}} := (\zeta + \xi)/2, \xi_{\text{mid}}^+ := \xi_{\text{mid}} + d\bar{v}$  và  $\xi_{\text{mid}}^- := \xi_{\text{mid}} - d\bar{v}$ , trong đó  $d := \|\zeta - \xi\|/2$  và  $\bar{v}$  là véc tơ đơn vị vuông góc với cạnh  $\zeta\xi$ . Đầu tiên thiết lập  $\Xi_C := \emptyset$ .

2. Nếu  $\xi \in \Xi_{\text{int}}$  thì đối với mỗi  $\xi' \in \xi_{\text{mid}}, \xi_{\text{mid}}^+, \xi_{\text{mid}}^-$  :

Nếu  $\text{dist } \xi', \partial\Omega \geq d/2$  và  $\text{dist } \xi', \Xi' \geq \mu \text{sep}_\xi$ .  $\Xi'$  thì thiết lập  $\Xi_C := \Xi_C \cup \xi'$  .

3. Hoặc nếu  $\xi \in \partial\Xi$  :

i. Với mỗi  $\xi' \in \xi_{\text{mid}}, \xi_{\text{mid}}^+, \xi_{\text{mid}}^-$  :

Nếu  $\text{dist } \xi', \partial\Omega \geq d/2$  và  $\text{dist } \xi', \Xi' \geq d/2$  thì thiết lập  $\Xi_C := \Xi_C \cup \xi'$  .

ii. Nếu  $\Xi_C \neq \emptyset$  hoặc  $\text{dist}(\xi_{\text{mid}}, \partial\Omega) < d/2$  thì

Tìm hai tâm lân cận  $\xi_-, \xi_+$  của  $\xi$  trong  $\partial\Xi$ , mỗi tâm theo một hướng của  $\xi$  dọc theo biên và tính hai điểm giữa  $\xi', \xi'_+ \in \partial\Omega$  được xác định bởi cặp  $\xi, \xi_-$  và  $\xi, \xi_+$ , phân biệt. Thiết lập  $\Xi_C := \Xi_C \cup \xi'_+, \xi'_-$  .

4. Thiết lập  $\Xi' := \Xi' \cup \Xi_C$ .

III. Nếu số tâm trong  $\Xi'_{\text{int}} \setminus \Xi_{\text{int}}$  ít hơn  $n\%$  số tâm trong  $\Xi_{\text{int}}$ , thì đặt  $\bar{\varepsilon} := \gamma\bar{\varepsilon}$  và quay lại Bước II.

### III. PHƯƠNG PHÁP KHÔNG LƯỚI RBF-FD GIẢI BÀI TOÁN ELLIPTIC

• **Véc tơ trọng số bởi nội suy RBF**

Cho  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm xác định dương [1]. Chẳng hạn, hàm Gaussian  $\phi r = e^{-\varepsilon r^2}$ , trong đó  $\varepsilon$  là tham số hình dạng. Cho trước tập  $\Xi_\zeta = \xi_0, \xi_1 \dots \xi_k \subset \mathbb{R}^d$  và hàm  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , nội suy hàm cơ sở bán kính  $s$  được biểu diễn như sau:

$$s(\xi_0) = \sum_{j=0}^k a_j \Phi_{\xi_0 - \xi_j}, \quad \Phi_{\xi_0} := \phi \|\xi_0\|_2, \tag{3.1}$$

với điều kiện nội suy:

$$s_{\xi_i} = u_{\xi_i}, \quad \text{với } i = 0, 2, \dots, k. \tag{3.2}$$

Từ các Công thức (3.1)-(3.2), ta có:

$$\sum_{j=0}^k a_j \Phi_{\xi_i - \xi_j} = u_{\xi_i}, \quad \text{với } i = 0, 1, \dots, k. \tag{3.3}$$

Hệ phương trình tuyến tính (3.3) có thể viết trong dạng ma trận như sau:

$$\Phi_{\Xi_\zeta} a = u_{|\Xi_\zeta}, \quad \Phi_{\Xi_\zeta} := \left[ \Phi_{\xi_i - \xi_j} \right]_{i,j=0}^k,$$

trong đó  $\Phi_{\Xi_\zeta}$  là ma trận đối xứng xác định dương. Vì vậy,

$$a = \Phi_{\Xi_\zeta}^{-1} u_{|\Xi_\zeta}.$$

Cho  $\Delta$  là toán tử vi phân tuyến được tác động vào  $u_{\xi_0}$  trong công thức (3.3). Chúng ta cần tìm xấp xỉ của  $\Delta u_{\xi_0}$  bằng công thức vi phân tuyến tính,

$$\Delta s_{\xi_0} = \sum_{j=1}^k a_j \Delta \Phi_{\xi_0 - \xi_j}. \tag{3.4}$$

Cho  $\Xi_\zeta = \xi_i \big|_{i=0}^k$  là tập tâm cố định trong không gian  $\mathbb{R}^d$  và (3.4) được viết dưới dạng

$$\begin{aligned}
\Delta s \xi_0 &= a^T \Delta \Phi \xi_0 \cdot \cdot \Big|_{\Xi_\zeta} \\
&= \left( \Phi_{\Xi_\zeta}^{-1} u \Big|_{\Xi_\zeta} \right)^T \Delta \Phi \xi_0 \cdot \cdot \Big|_{\Xi_\zeta} \\
&= \Phi_{\Xi_\zeta}^{-1} \Delta \Phi \xi_0 \cdot \cdot \Big|_{\Xi_\zeta} u \Big|_{\Xi_\zeta} \\
&= \sum_{i=0}^k w_i u \xi_i = [w_i u \xi_i]_{i=0}^k,
\end{aligned}$$

trong đó véc tơ

$$w = w_0 w_1 \dots w_k \quad T = \Phi_{\Xi_\zeta}^{-1} \Delta \Phi \xi_0 \cdot \cdot \Big|_{\Xi_\zeta}, \quad (3.5)$$

được gọi là véc tơ trọng số với

$$\Phi \Big|_{\Xi_\zeta} := \left[ \phi \left\| \xi_i - \xi_j \right\|_2 \right]_{i,j=0}^k. \quad (3.6)$$

• **Phương pháp RBF-FD giải bài toán Elliptic**

1. *Véc tơ trọng số cho phương pháp RBF-FD giải bài toán elliptic*

Giả sử toán tử  $L$  trong hệ phương trình (1.1) có dạng

$$Lu(x) = \Delta u(x) + b(x)u(x). \quad (3.7)$$

Như trong [4], ta có

$$Lu(\xi_0) \approx \sum_{i=0}^k w_i u(\xi_i) + b(\xi_0)u(\xi_0). \quad (3.8)$$

Vì vậy trọng số  $w_{\zeta, \xi}$  trong hệ phương trình (1.2) được chọn như sau:

$$w_{\zeta, \xi_0} = w_0 + b(\xi_0), \quad w_{\zeta, \xi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.9)$$

2. *Lược đồ phương pháp không lưới RBF-FD giải bài toán elliptic*

**Input:**

- Miền  $\Omega$ ;
- Các hàm  $f, g$ ;
- Hàm nội suy RBF Gaussian.

**Output:** Nghiệm xấp xỉ.

**Lược đồ**

• **Bước 1: Sinh bộ tâm  $\Xi$  bằng Thuật toán 1 như trình bày trong Phần II phía trên**

• **Bước 2: Với mỗi  $\zeta \in \Xi_{inb}$**

- a) Chọn tập  $\Xi_\zeta$  bởi Thuật toán chọn tâm trong [2, 4] hoặc [6];
- b) Tính tham số hình dạng  $\varepsilon$  nhỏ nhất thỏa mãn số điều kiện của ma trận nội suy (3.6) không vượt quá  $10^{12}$ , xem [2, 3];
- c) Tính véc tơ trọng số theo Công thức (3.5) với tham số hình dạng  $\varepsilon$  tính trong Bước 2 b):

$$w_{\zeta, \xi} = \Phi_{\Xi_\zeta}^{-1} \Delta \Phi \zeta \cdot \cdot \Big|_{\Xi_\zeta};$$

- d) Tính  $w_{\zeta, \xi}$  theo Công thức (3.9);
- e) Thay  $w_{\zeta, \xi}$  vừa tính được vào hệ phương trình (1.2).

- **Bước 3:** Giải hệ phương trình (1.2) để tìm nghiệm xấp xỉ  $\tilde{u}_\zeta$ , với  $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$ .
- **Bước 4:** Tính sai số trung bình bình phương  $rms$  (root mean square):

$$rms := \left( \frac{1}{\#\Xi_{\text{int}}} \sum_{\zeta \in \Xi_{\text{int}}} \tilde{u}_\zeta - u_\zeta^2 \right)^{1/2}. \tag{3.10}$$

### IV. THỬ NGHIỆM SỐ

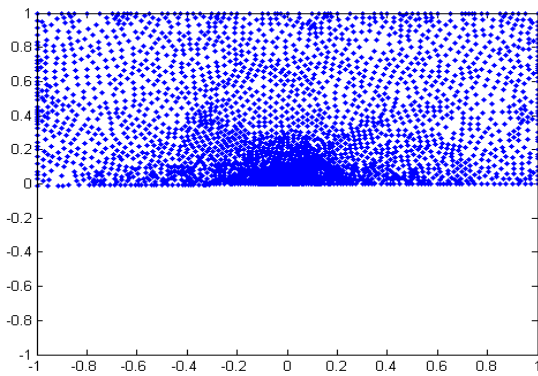
Để so sánh sự khác nhau về độ chính xác và sự ổn định của nghiệm xấp xỉ tìm được, chúng tôi sẽ sử dụng giá trị các tham số giống như trong bài báo [4]. Cụ thể như sau:

- Đối với thuật toán chọn tâm, sử dụng Thuật toán 1 trong [4] với tham số  $c = 3$ ;  $v = 2.5$  và  $m = 50$ .
- Đối với Thuật toán sinh tâm, chúng tôi chỉ thay đổi các giá trị của tham số  $\mu$  hoặc  $k_s$ .

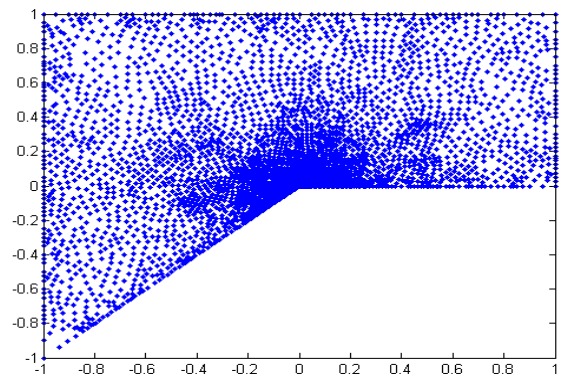
Trong khuôn khổ bài báo này chúng tôi chỉ xét một bài toán với độ dao động của hàm tăng dần cùng với sự phức tạp của miền hình học tương ứng.

**Bài toán:** Cho bài toán Dirichlet với phương trình Laplace  $\Delta u = 0$  trong miền  $\Omega_\omega = [-1, 1]^2 \cap \{r, \varphi : 0 < \varphi < \omega\}$ , trong đó  $r$  và  $\varphi$  là tọa độ cực với  $\omega \in (0, 2\pi)$ . Điều kiện biên được chọn thỏa mãn lời giải chính xác  $r^\alpha \sin \alpha\varphi$  trong hệ tọa độ cực, trong đó  $\alpha = \pi/\omega$ . Chúng tôi gọi trường hợp  $\omega = \pi + 0.01, 5\pi/4, 7\pi/4$  và  $2\pi$  tương ứng là bài toán a), b), c) và d).

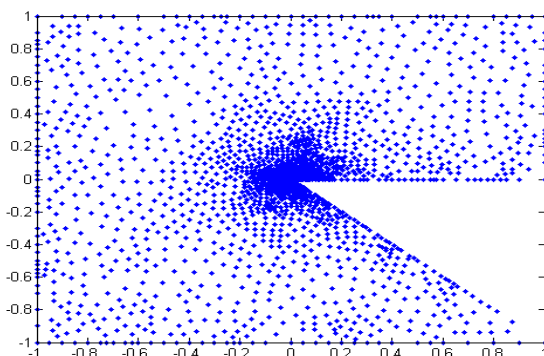
Trong Hình 1, các hình (a), (d) sử dụng  $\mu = 0.81$ , hình (c) sử dụng  $\mu = 0.83$ , hình (b) sử dụng  $k_s = 2$ , còn các tham số khác giống như bài báo [4]. Hình (a) biểu diễn 2481, hình (b) biểu diễn 3392 tâm trong miền; Hình (c) biểu diễn 1917, và hình (d) biểu diễn 2038 tâm trong miền.



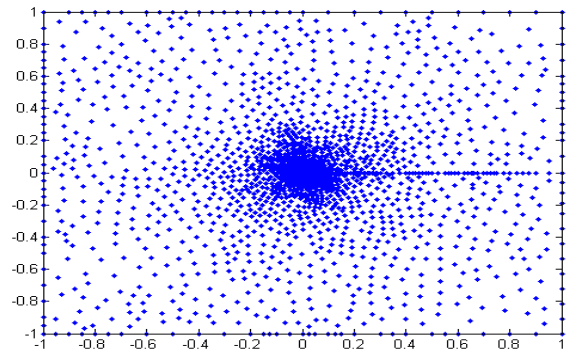
(a) Sự phân bố tâm của Bài toán a) với  $\Xi_{\text{int}} = 2481$



(b) Sự phân bố tâm của Bài toán b) với  $\Xi_{\text{int}} = 3392$

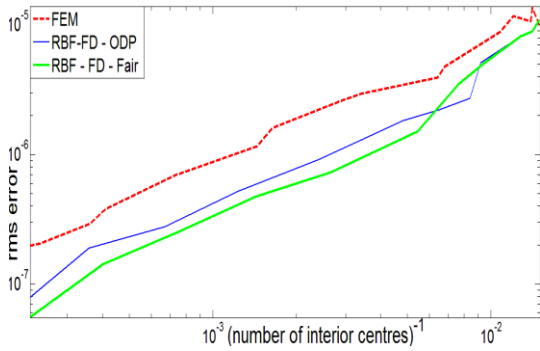


(c) Sự phân bố tâm của Bài toán c) với  $\Xi_{\text{int}} = 1917$

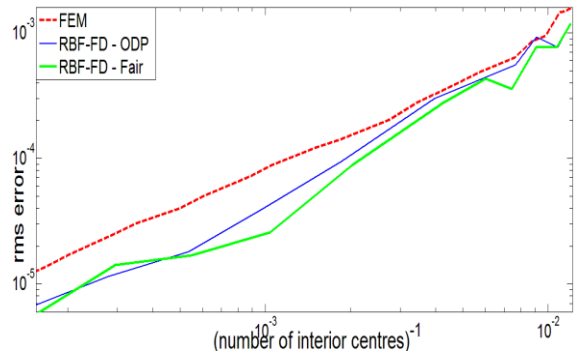


(d) Sự phân bố tâm của Bài toán d) với  $\Xi_{\text{int}} = 2038$

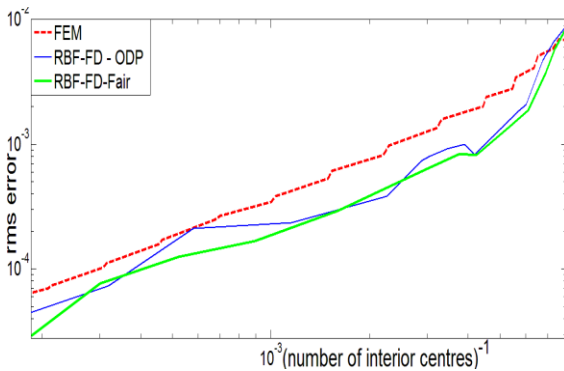
**Hình 1.** Hình (a), (b), (c), (d) biểu diễn bộ tâm tại một lần làm mịn của bài toán a), b), c) và d).



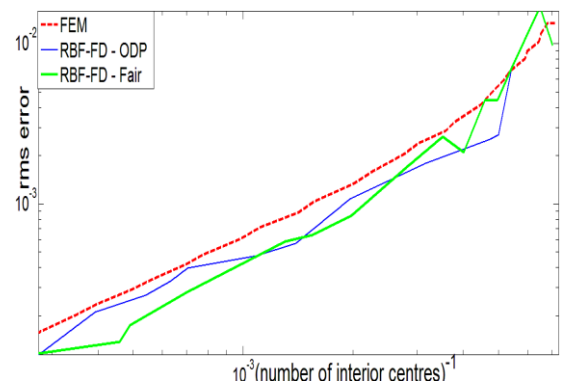
(a) Sai số rms của Bài toán a)



(b) Sai số rms của Bài toán b)



(c) Sai số rms của Bài toán c)



(d) Sai số rms của Bài toán d)

**Hình 2.** Hình (a), (b), (c), (d) biểu diễn sai số rms tương ứng các bài toán a), b), c) và d).

Trong các hình a), b), c), d) của Hình 2, tất cả các đường cong đều biểu diễn sai số trung bình bình phương rms theo Công thức (3.8). Đường cong màu đỏ (FEM) biểu diễn sai số rms của nghiệm xấp xỉ bởi phương pháp FEM trên các đỉnh của tam giác được tạo ra nhờ pde Toolbox trong Matlab [7]; Đường cong màu xanh da trời (RBF-FD - ODP) biểu diễn sai số của phương pháp RBF-FD trên các tâm được sinh ra bởi các thuật toán và các tham số như trong [4]; Đường cong màu xanh lá cây (RBF-FD - Fair) biểu diễn sai số của phương pháp RBF-FD trên các tâm được sinh ra bởi các thuật toán trong [4] nhưng với tham số  $\mu$  hoặc tham số  $k_s$  được chọn hơi khác một chút. Cụ thể là:

- Trong Hình 2a) và 2d) tương ứng với Bài toán a) và Bài toán d), đường cong màu xanh lá cây sử dụng  $\mu = 0.81$ , còn đường cong màu xanh da trời sử dụng tham số  $\mu = 0.80$ . Quan sát ta thấy, với Bài toán a), nghiệm xấp xỉ trong trường hợp  $\mu = 0.81$  chính xác và ổn định hơn  $\mu = 0.80$  khi số tâm lớn hơn khoảng 400.
- Trong Hình 2b) tương ứng với Bài toán b), đường cong màu xanh lá cây sử dụng  $k_s = 2$ , còn đường cong màu xanh da trời sử dụng tham số  $k_s = 4$ . Quan sát ta thấy Bài toán b) cho nghiệm xấp xỉ trong trường hợp  $k_s = 2$  chính xác và ổn định hơn  $\mu = 0.80$   $k_s = 4$ .
- Trong Hình 2c) tương ứng Bài toán b), đường cong màu xanh lá cây sử dụng  $\mu = 0.83$ , còn đường cong màu xanh da trời sử dụng tham số  $\mu = 0.80$ . Quan sát ta thấy, với Bài toán c) cho nghiệm xấp xỉ trong trường hợp  $\mu = 0.83$  chính xác và ổn định hơn  $\mu = 0.80$ .

Từ các kết quả phía trên cho thấy mỗi trường hợp bài toán cụ thể đều có bộ tham riêng biệt cho bài toán đó để cho kết quả tốt hơn. Hơn nữa, các giá trị này không khác nhiều so với các giá trị tham số mà chúng tôi đã sử dụng trong [4].

## V. KẾT LUẬN

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu và khảo sát sự ảnh hưởng của các tham số tạo nên điều kiện tách biệt trong thuật toán sinh tâm thích nghi trong [2] và [4]. Kết quả thử nghiệm trong Phần IV cho ta thấy chỉ cần thay đổi một chút các giá trị tham số này thì độ chính xác và sự ổn định của nghiệm xấp xỉ trên bộ tâm được làm mịn sẽ cải tiến đáng kể. Các kết quả này là một trong những tiền đề giúp chúng tôi theo đuổi các nghiên cứu với điều kiện tách biệt trong thuật toán làm mịn với mục tiêu sinh ra được bộ tâm thích nghi tốt cho phương pháp không lưới RBF-FD giải phương trình đạo hàm riêng.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- [1] Martin D. Buhmann. ‘Radial Basis Functions’. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2003.
- [2] Oleg Davydov and Dang Thi Oanh. ‘Adaptive meshless centres and RBF stencils for Poisson equation’. *Journal of Computational Physics*, 230:287-304, 2011.
- [3] Oleg Davydov and Dang Thi Oanh. ‘On the Optimal shape parameter for Gaussian radial basis function finite difference approximation of the Poisson equation’. *Computers and Mathematics with Applications*, 62:2143-2161, 2011.
- [4] Dang Thi Oanh, Oleg Davydov and Hoang Xuan Phu. ‘Adaptive RBF-FD Method for Elliptic Problems with Points Singularities in 2D’. *Applied Mathematics and computation*, 313: 474-497, 2017.
- [5] William F. Mitchell. ‘A collection of 2D elliptic problems for testing adaptive grid refinement algorithms’. *Applied Mathematics and Computation*, 220:350-364, 2013.
- [6] Đặng Thị Oanh và Nguyễn Văn Tảo ‘Nghiên cứu thuật toán chọn k-láng giềng gần với hai điều kiện dừng cho phương pháp RBF-FD giải phương trình Poisson trong 2D’, *Kỷ yếu Hội thảo Fair 2016*, 509-514, 2016.
- [7] ‘Partial Differential Equation Toolbox™ User’s Guide’. The MathWorks, Inc, 2009.

**THE EFFECTS OF THE SEPARATION CONDITION PARAMETERS IN THE ADAPTIVE MESHLESS REFINEMENT ALGORITHM FOR THE RBF-FD METHOD TO SOLVE THE ELLIPTIC PROBLEMS**

**Dang Thi Oanh, Ngo Manh Tuong, Trinh Minh Duc**

*ABSTRACT: Adaptive meshless refinement is the process by which the new centres are generated around the places where the function has a large oscillation or the geometry domain is complex (having sharp angles). In our previous publications on the adaptive meshless algorithms, each new centre  $x$  is generated if it satisfies the separation condition between it and other centres in its vicinity. ([Oleg Davydov and Dang Thi Oanh, Adaptive meshless centers and RBF stencils for Poisson equation, *Journal of Computational Physics*, 230:287-304, 2011] and [Dang Thi Oanh, Oleg Davydov and Hoang Xuan Phu, Adaptive RBF-FD Method for Elliptic Problems with Point Singularities in 2D, *Applied Mathematics and computation*, 313: 474-497,2017]).*

*In this paper, we focus on the use of the adaptive meshless refinement for the RBF-FD to solve an elliptic problem. We especially study the effect of the “measure of angle uniformity”  $\mu$  and the number of centres  $k_s$  near  $x$  in the separation condition, leaving other parameters unchanged. The numerical results show that the solutions are more exact and stable if we choose the suitable values for these separation parameters.*

**Từ khóa:** RBF-FD, PDE, Dirichlet, Elliptic problem, Approximation.